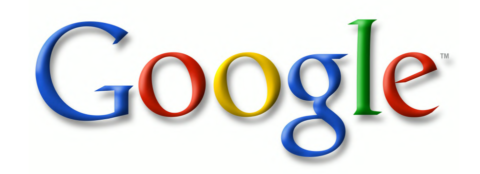
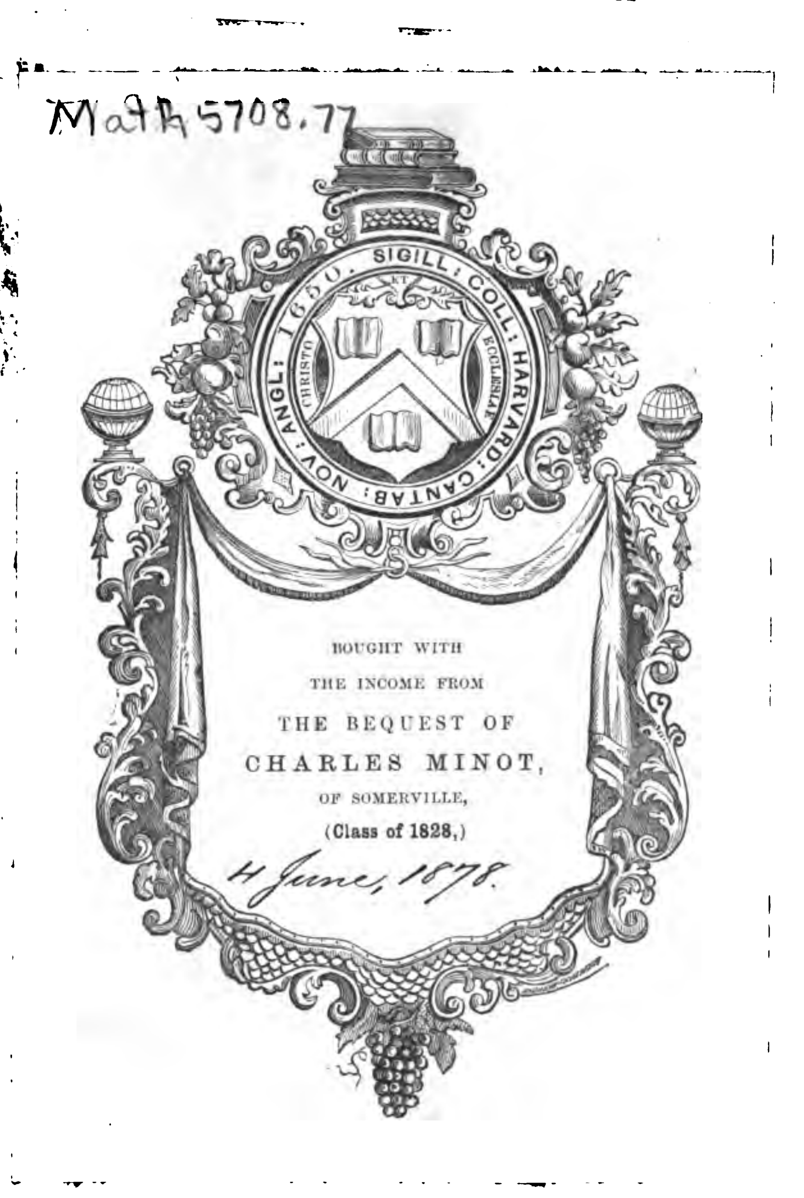





SIGILL: COLL: HARVARD: CANTAB: NOV: ANGL: 1650.
CHRISTO ET ECCLESIAE

DIE ELEMENTE
DER
DARSTELLENDEN GEOMETRIE

AUF

GRUND NEUERER ANSCHAUUNGSWEISEN
FÜR HÖHERE SCHULEN

BEARBEITET VON

KARL KLEKLER,

PROF. AN DER K. K. MARINE-AKADEMIE ZU FIUME.

I. THEIL:

DIE METHODEN DER DARSTELLENDEN GEOMETRIE ZUR DARSTELLUNG DER GEOMETRISCHEN ELEMENTE UND GRUNDGEBILDE.



MIT 13 LITHOGRAPHIRTEN TAFELN.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1877.

DIE METHODEN

DER

DARSTELLENDEN GEOMETRIE

ZUR

DARSTELLUNG DER GEOMETRISCHEN ELEMENTE UND GRUNDGEBILDE.

VON

KARL KLEKLER,
PROF. AN DER K. K. MARINE-AKADEMIE ZU FIUME.



MIT 13 LITHOGRAPHIRTEN TAFELN.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1877.

1878, June 4.
Minot Fund.
(per Phil)

Vorwort.

Es ist eine allgemein anerkannte Thatsache, dass eine Reform des geometrischen Unterrichts an den höheren Schulen unbedingt nothwendig geworden ist, und dass namentlich dem Unterrichte auf dieser Stufe nicht länger die wichtigsten Begriffe und Lehrsätze der Geometrie der Lage vorenthalten werden können. Bei der im vergangenen Jahre zu Stuttgart abgehaltenen Versammlung deutscher Philologen und Schulmänner fand dieses Reformbedürfniss beredten Ausdruck, und wurde besonders darauf hingewiesen, dass sich vorzugsweise bei dem Unterrichte in der darstellenden Geometrie die Einführung in die Grundbegriffe der neuern Geometrie am leichtesten bewerkstelligen liesse. Dem gleichen Gedanken verdankt das vorliegende Werkchen seine Entstehung. Es ist ein Versuch, den Unterricht in der darstellenden Geometrie an der Mittelschule auf einer wissenschaftlicheren Basis aufzubauen, und den mathematisch-geometrischen Theil dieser Disciplin gegen den bisher mehr bevorzugten technisch-constructiven Theil in den Vordergrund zu stellen.

Nach einer kurzen Einleitung, in welcher die wichtigsten Begriffe der neuern Geometrie erläutert werden, folgt die Untersuchung der Darstellungsmethoden der geometrischen Elemente und Grundgebilde, die Behandlung der Aufgaben über die wechselseitige Bestimmung derselben und über die Grössenbestimmung der durch die geometrischen Elemente gebildeten Raumgrössen, sowohl in der Orthogonal- als in der Centralprojection.

Der Behandlung der Methoden der Orthogonalprojection erscheint bereits vom Anfang an ein aus drei auf einander senkrechten Ebenen bestehendes Projectionssystem zu Grunde

gelegt, was mir, trotz der anfänglich grössern Schwierigkeit, deshalb zweckmässig erschien, weil durch die Untersuchung dieses Projectionssystems, seiner Halbirungsebenen und Halbirungsgeraden, seiner Richtungen und Stellungen gleicher Neigung und der Beziehungen zur Zeichnungsebene eine Fülle passenden Uebungsmaterials geboten wird, das, zweckmässig verwendet, dem Schüler bald zu einer verhältnissmässig sichern Raumanschauung verhelfen wird.

Der ganzen Anordnung, mit Ausnahme der die Bestimmung der Maassgrössen behandelnden Theile, liegt die ausgedehnteste Anwendung des Princips der Dualität zu Grunde. Dasselbe kommt auch bei der ebenen Darstellung der sich im Raume dual entsprechenden Elemente und Gebilde zur vollständigen Geltung, indem der Reciprocität von Punkten und Ebenen im Raume die Reciprocität von Punkten und Geraden in der Zeichnungsebene substituirt erscheint. Diese Behandlungsart ist vorzugsweise geeignet, dem Schüler die fundamentale Wichtigkeit dieses Princips im ganzen Gebiete der Lagengeometrie zu veranschaulichen, und bietet andererseits den unleugbaren pädagogischen Vortheil, dass, bei der Behandlung solcher zusammengehöriger Sätze und Aufgaben, in der Aufsuchung des dualistisch Entsprechenden die Selbstthätigkeit des Schülers ein mächtiges Anregungsmittel gewinnt.

Eine nothwendige Folge dieser Anordnung des Stoffes ist die völlige Gleichstellung der Projectionen und Spuren als Darstellungsmittel geometrischer Elemente und Gebilde; wie denn Punkte nur durch ihre Projectionen, Ebenen nur durch ihre Spuren darstellbar sind, während Gerade in gleicher Weise durch ihre Projectionen, wie durch ihre Spuren bestimmt erscheinen.

Die Betrachtung der Darstellungsweisen der Punktreihe, des Ebenen- und Strahlenbüschels führt zu dem Begriffe der Projectivität dieser Gebilde, während die Untersuchung der durch die Projectionen eines ebenen Systems und durch die Spuren eines Strahlenbündels gebildeten Systeme in der Zeichnungsebene zur Feststellung der Begriffe der Collineation, Affinität und Aehnlichkeit ebener Systeme führt. Hierbei leitet die einfache reciproke Uebertragung der Affinitätsaxen zwischen den Projectionen eines ebenen Systems zur Auf-

findung der Collineationscentren zwischen den Spurensystemen eines Strahlenbündels, welche für die Darstellung desselben die gleiche Wichtigkeit besitzen, wie die ersteren für die Darstellung des ebenen Systems.

Die Aufgaben über die wechselseitige Bestimmung der geometrischen Elemente und Grundgebilde werden in dualistischer Anordnung, in Uebereinstimmung mit den in der Einleitung gegebenen entsprechenden Lehrsätzen der Lagengeometrie behandelt, wobei sich wieder manche nicht uninteressante Kleinigkeit durch die reciproke Uebertragung bekannter Aufgaben ergibt.

Sollte dieser Versuch einige Freunde gewinnen und sich nicht als verfehlt erweisen, so gedenke ich in einem zweiten Theile in gleicher Anordnung die Gebilde in der Punktreihe, dem Ebenen- und Strahlenbüschel (harmonische Punkte etc.), die eckigen Figuren in der Ebene und im Strahlenbündel, die Polyeder, sowie die Curven, Kegel und Flächen zweiter Ordnung zu behandeln, was nach meiner Ansicht das Pensum der höheren Schulen erschöpfen dürfte.

Mit dem Wunsche, einen brauchbaren Beitrag zur nothwendigen Reform des geometrischen Unterrichts geliefert zu haben, übergebe ich das Werkchen der Oeffentlichkeit.

Fiume, im März 1877.

Der Verfasser.

Inhaltsverzeichniss.

Einleitung und Vorbegriffe.

Seite

§. 1. Aufgabe und Bedeutung der darstellenden Geometrie . . . 1

§. 2. Die geometrischen Elemente und ihre gegenseitige Lagenbestimmung . . . 1

§. 3. Die Grundgebilde erster Stufe und die wechselseitige Bestimmung derselben durch Schnitt- und Scheinbildung 2

§. 4. Die Grundgebilde zweiter Stufe und ihre gegenseitigen Beziehungen . . . 4

§. 5. Der Raum als Grundgebilde dritter Stufe. Geometrische Raumformen der ersten, zweiten und dritten Stufe 5

§. 6. Die unendlich fernen Elemente des Raumes (perspectivische Raumansicht) . . . 6

Methoden der darstellenden Geometrie.

A. Orthogonale Projection.

Darstellung der geometrischen Elemente und der Grundgebilde erster und zweiter Stufe.

§. 7. Projectionen und Spuren der geometrischen Elemente in Beziehung auf eine Projectionsebene. . . . 9

§. 8. Lagenbestimmung des Punktes und der Ebene gegen ein aus drei auf einander senkrechten Ebenen bestehendes Projectionssystem durch Coordinaten; Beziehungen zwischen den Coordinaten und den Projectionen und Spuren (Taf. I, Fig. 1a und 1b) . . . 10

§. 9. Zusammenlegung der drei Projectionsebenen in die Zeichnungsebene . . . 13

§. 10. Allgemeine Gesetze der Darstellung des Punktes und der Ebene durch drei Projectionen und Spuren in der Zeichnungsebene (Taf. I, Fig. 2a und 2b) . . . 15

§. 11. Darstellung des Punktes und der Ebene bei allgemeiner und specieller Lage gegen das Projectionssystem (Taf. I, Fig. 3a—5b) 18

§. 12. Halbirungsebenen und Halbirungsgerade, Richtungen und Stellungen gleicher Neigung im Projectionssysteme (Taf. I, Fig. 6a—Taf. II, Fig. 8b) . . . 23

Seite

§. 13. Darstellung der Geraden durch ihre Projectionen oder Spuren; gegenseitige Beziehungen dieser beiden Darstellungsarten (Taf. II, Fig. 9a—11b) 28
§. 14. Specielle Lagen der Geraden (Taf. II, Fig. 12a—Taf. III, Fig. 14b) 33
§. 15. Darstellung der Punktreihe und des Ebenenbüschels (Taf. III, Fig. 15a—16b) 36
§. 16. Darstellung des Strahlenbüschels 39
§. 17. Darstellung des ebenen Systems und des Strahlenbündels. Affinität und Collineation der drei durch die Projectionen des ebenen Systems, bez. durch die Spuren des Strahlenbündels gebildeten ebenen Systeme in der Zeichnungsebene. Collineationsaxen, Collineationscentren und Gegenaxen derselben (Taf. III, Fig. 17a—Taf. IV, Fig. 24b) 39
§. 18. Das Strahlenbüschel als Element des ebenen Systems und des Strahlenbündels 57

Aufgaben über die gegenseitige Bestimmung geometrischer Elemente und Grundgebilde.

§. 19. Aufgaben über die Bestimmungen von Punkten, Ebenen und Geraden (Taf. V, Fig. 25a—Taf. VI, Fig. 35b) 58
§. 20. Aufgaben über die Bestimmungen von Punktreihen, Ebenen und Strahlenbüscheln (Taf. VI, Fig. 36a—Taf. VII, Fig. 38b) 72
§. 21. Schnitt eines Strahlenbündels durch eine gegebene Ebene; Schein eines ebenen Systems aus einem gegebenen Punkte (Taf. VII, Fig. 39) 77
§. 22. Reciprocitätsbeziehungen 80
§. 23. Darstellung der Raumformen auf nur zwei Projectionsebenen. Reciprocitätsbeziehungen dieses Projectionssystems 82

Maassbestimmungen.

§. 24. Bestimmung der wahren Grösse einer Strecke (Taf. VII, Fig. 40—43) 83
§. 25. Bestimmung der wahren Grösse eines ebenen Winkels. Umlegen einer Ebene in eine der Projectionsebenen (Taf. VII, Fig. 44 und 45) 87
§. 26. Bestimmung des Neigungswinkels eines Keiles. Neigungswinkel einer Ebene gegen die Projectionsebenen (Taf. VIII, Fig. 46—48) 90
§. 27. Abstand eines Punktes von einer Geraden. Abstand zweier paralleler Geraden (Taf. VIII, Fig. 49 und 50) 93
§. 28. Neigungswinkel einer Geraden gegen eine Ebene. (Taf. VIII, Fig. 51) 95
§. 29. Abstand eines Punktes von einer Ebene. Abstand zweier paralleler Ebenen (Taf. VIII, Fig. 52) 95
§. 30. Abstand zweier sich kreuzender Geraden (Taf. IX, Fig. 53—56) 96

B. Centralprojection.

Darstellung der geometrischen Elemente und der Grundgebilde erster und zweiter Stufe.

Seite

§. 31. Das Projectionssystem bei der Centralprojection 100
§. 32. Centralprojection eines Punktes und Spur einer Ebene . . 101
§. 33. Centralprojection und Spur einer Geraden 102
§. 34. Darstellung des Punktes durch seine Central- und Orthogonalprojection und der Ebene durch Spur und Fluchtlinie, bei allgemeiner und besonderer Lage gegen das Projectionssystem (Taf. IX, Fig 57a—58b) 103
§. 35. Darstellung der Geraden durch Central- und Orthogonalprojection oder durch Spur und Fluchtpunkt, bei allgemeiner und besonderer Lage gegen das Projectionssystem. Gegenseitige Beziehungen zwischen beiden Darstellungsarten (Taf. IX, Fig. 59—Taf. X, Fig. 60b) 107
§. 36. Darstellung der Punktreihe und des Ebenenbüschels (Taf. X, Fig. 61a—63b) 110
§. 37. Darstellung des ebenen Systems und des Strahlenbündels (Taf. X, Fig. 64a und 64b) 116
§. 38. Darstellung des Strahlenbüschels 121

Aufgaben über die gegenseitige Bestimmung geometrischer Elemente und Grundgebilde.

§. 39. Aufgaben über die Bestimmungen von Punkten, Ebenen und Geraden (Taf. X, Fig. 65a—Taf. XI, Fig. 71b) . . . 122
§. 40. Schnitt eines Strahlenbündels durch eine gegebene Ebene, Schein eines ebenen Systems von einem gegebenen Punkt (Taf. XII, Fig. 72) 131
§. 41. Reciprocitätsbeziehungen 136

Maassbestimmungen.

§. 42. Umlegen einer Ebene in die Projectionsebene (Taf. XII, Fig. 73 und 74) 137
§. 43. Bestimmung der wahren Grösse von Strecken (Taf. XII, Fig. 75—77) 140
§. 44. Bestimmung der wahren Grösse eines Winkels (Taf. XII, Fig. 78) 144
§. 45. Bestimmung des Neigungswinkels eines Keiles; Neigungswinkel einer Ebene gegen die Projectionsebene (Taf. XII, Fig. 79 und Taf. XIII, Fig. 80) 144
§. 46. Abstand eines Punktes von einer Geraden (Taf. XIII, Fig. 81 und 82) 146
§. 47. Neigungswinkel einer Geraden gegen eine Ebene; Neigungswinkel einer Geraden gegen die Projectionsebene (Taf. XIII, Fig. 83 und 84) 147
§. 48. Abstand eines Punktes von einer Ebene; Abstand zweier Parallelebenen (Taf. XIII, Fig. 85) 148
§. 49. Abstand zweier sich kreuzender Geraden (Taf. XIII, Fig. 86—88) 149

Einleitung und Vorbegriffe.

§. 1. Die Aufgabe der darstellenden Geometrie ist die Abbildung der geometrischen Raumformen in einer Ebene, und zwar in solcher Weise, dass jeder bestimmten Raumform nur eine bestimmte ebene Abbildung entspricht, und umgekehrt aus der graphischen Darstellung in der Ebene die Grössen und Lagenverhältnisse der dargestellten Raumform vollkommen bestimmt erscheinen. Die darstellende Geometrie ist so einerseits ein unentbehrliches Hilfsmittel für den Techniker zur graphischen Darstellung der in seinen Fächern vorkommenden räumlichen Objecte; andererseits dient sie als Unterstützung und Ausgangspunkt für die höheren geometrischen Studien, da ihre Methode ein klares Verständniss der Aufgaben der Raumgeometrie, der einzelnen Raumformen und ihrer gegenseitigen Beziehungen vermittelt.

§. 2. Bevor wir daran gehen können, die Methoden zu erläutern, durch welche die darstellende Geometrie ihrer Aufgabe nachkommt, ist es nothwendig, einige Begriffe und Lehrsätze der Geometrie der Lage voranzuschicken, von welchen im Folgenden häufig Gebrauch gemacht wird.

Die geometrischen Elemente, aus welchen (durch Reihung oder Bewegung alle Raumformen erzeugt gedacht werden können, sind: der Punkt, die Ebene und die Gerade. Durch zwei oder mehrere dieser Elemente wird die Lage eines neuen geometrischen Elementes bestimmt, und zwar

1a. Durch zwei Punkte a und b ist eine Gerade α bestimmt, welche durch die beiden Punkte geht.	1b. Durch zwei Ebenen A und B ist eine Gerade α bestimmt, in welcher sich die beiden Ebenen schneiden.
2a. Zwei Gerade α und β, die einen Punkt a gemeinsam haben, bestimmen auch eine Ebene A, in welcher sie liegen.	2b. Zwei Gerade α und β, die in einer Ebene liegen, bestimmen auch einen Punkt a, in welchem sie sich schneiden

3a. Durch eine Gerade α und einen ausserhalb derselben befindlichen Punkt a ist eine Ebene A bestimmt, welche den Punkt mit der Geraden verbindet.

3b. Durch eine Gerade α und eine nicht durch sie gehende Ebene A ist ein Punkt a bestimmt, in welchem die Gerade und die Ebene sich schneiden.

4a. Durch drei Punkte a, b und c, welche nicht in einer Geraden liegen, ist eine Ebene A bestimmt, welche durch die drei Punkte geht.

4b. Durch drei Ebenen A, B und C, welche nicht durch eine Gerade gehen, ist ein Punkt a bestimmt, in welchem sich die drei Ebenen schneiden.

Hier zeigt sich schon, wie bei allen Lehrsätzen der Geometrie der Lage ein gewisses Gesetz der Reciprocität oder Dualität, nach welchem im Raume der Punkt und die Ebene einander gegenüberstehen (reciproke Begriffe sind); so dass sich aus einem geometrischen Lehrsatze sogleich ein anderer ergibt, wenn man in demselben die Begriffe Punkt und Ebene mit einander vertauscht. Im Folgenden werden je zwei solcher reciproker Sätze immer, wie oben, durch unmittelbare Nebeneinanderstellung hervorgehoben erscheinen.

§. 3. Den Inbegriff aller in einer unbegrenzten Geraden liegenden Punkte nennt man eine Punktreihe. Die Gerade, in welcher alle Punkte liegen, heisst der **Träger** der Punktreihe, und die einzelnen Punkte erscheinen als die Elemente derselben.

Den Inbegriff aller durch eine Gerade im Raume gehenden Ebenen nennt man ein Ebenenbüschel. Die Gerade, durch welche alle Ebenen gehen, heisst die **Axe** des Ebenenbüschels, und die einzelnen Ebenen erscheinen als die Elemente desselben.

Der Inbegriff aller durch denselben Punkt gehenden und in einer Ebene liegenden Geraden heisst ein Strahlenbüschel. Der Punkt, durch welchen die Geraden gehen, ist der **Mittelpunkt** des Strahlenbüschels, während die Ebene, in welcher diese Geraden liegen, als **Träger** desselben bezeichnet wird. Beim Strahlenbüschel erscheint also die Gerade, welche als Träger der Punktreihe und Axe des Ebenenbüschels vorgekommen ist, als Element, während die Elemente der letzteren Gebilde, Punkt und Ebene, als Mittelpunkt und Träger des Strahlenbüschels erscheinen. Die Punktreihe und das

Ebenenbüschel sind reciproke Gebilde, während das Strahlenbüschel sich selbst reciprok erscheint. Für die gegenseitigen Beziehungen dieser Gebilde ergeben sich folgende Lehrsätze:

1a. Eine Punktreihe und ein ausserhalb des Trägers derselben liegender Punkt bestimmen ein Strahlenbüschel, dessen Mittelpunkt der gegebene Punkt, und dessen Träger die Verbindungsebene dieses Punktes mit dem Träger der Punktreihe ist. Die Elemente des Strahlenbüschels sind die Verbindungsgeraden des gegebenen Punktes mit den einzelnen Punkten der Punktreihe.

1b. Ein Ebenenbüschel und eine nicht durch die Axe desselben gehende Ebene bestimmen ein Strahlenbüschel, dessen Träger die gegebene Ebene, und dessen Mittelpunkt der Schnittpunkt dieser Ebene mit der Axe des Ebenenbüschels ist. Die Elemente des Strahlenbüschels sind die Schnittlinien der gegebenen Ebene mit den einzelnen Ebenen des Ebenenbüschels.

2a. Ein Strahlenbüschel und eine durch den Mittelpunkt desselben gehende, nicht in dem Träger liegende Gerade bestimmen ein Ebenenbüschel, dessen Axe die gegebene Gerade ist, und als dessen Elemente die Verbindungsebenen der einzelnen Strahlen des Strahlenbüschels mit dieser Geraden erscheinen.

2b. Ein Strahlenbüschel und eine in dem Träger desselben liegende, nicht durch den Mittelpunkt gehende Gerade bestimmen eine Punktreihe, deren Träger die gegebene Gerade ist, und als deren Elemente die Schnittpunkte der einzelnen Strahlen des Strahlenbüschels mit dieser Geraden erscheinen.

3a. Ebenso bestimmen auch ein Strahlenbüschel und ein nicht in dessen Träger liegender Punkt ein Ebenenbüschel, dessen Axe die Verbindungsgerade des gegebenen Punktes mit dem Mittelpunkte des Strahlenbüschels ist, und als dessen Elemente die Verbindungsebenen der einzelnen Strahlen des Strahlenbüschels mit dem gegebenen Punkte sich ergeben.

3b. Ebenso bestimmen auch ein Strahlenbüschel und eine nicht durch dessen Mittelpunkt gehende Ebene eine Punktreihe, deren Träger die Schnittgerade der gegebenen Ebene mit der Ebene des Strahlenbüschels ist, und als deren Elemente die Schnittpunkte der einzelnen Strahlen des Strahlenbüschels mit der gegebenen Ebene sich ergeben.

4a. Eine Punktreihe und eine

4b. Ein Ebenenbüschel und

den Träger derselben nicht schneidende Gerade bestimmen ein Ebenenbüschel, dessen Axe die gegebene Gerade ist, und als dessen Elemente die Verbindungsebenen dieser Geraden mit den einzelnen Punkten der Punktreihe erscheinen.

Ein auf diese Weise erhaltenes Strahlen- oder Ebenenbüschel nennt man einen *Schein* des gegebenen Gebildes aus dem angenommenen Punkte oder der angenommenen Geraden.

§. 4. Den Gesammtbegriff aller in einer gegebenen Ebene liegenden Punkte, die wir uns in unzählige Punktreihen vertheilt denken können, deren Träger alle in der Ebene liegende Geraden sind; sowie aller in der Ebene liegenden Geraden, die sich in unendlich viele Strahlenbüschel gruppiren lassen, als deren Mittelpunkte alle Punkte in der Ebene erscheinen: nennt man ein *ebenes System*. Die Ebene, in welcher alle Elemente des ebenen Systems liegen, heisst der *Träger* desselben.

eine die Axe desselben nicht schneidende Gerade bestimmen eine Punktreihe, deren Träger die gegebene Gerade ist, und als deren Elemente die Schnittpunkte dieser Geraden mit den einzelnen Ebenen des Ebenenbüschels erscheinen.

Ein auf diese Weise erhaltenes Strahlenbüschel, beziehungsweise Punktreihe, nennt man einen *Schnitt* des gegebenen Gebildes mit der angenommenen Ebene oder Geraden.

Den Gesammtbegriff aller durch einen gegebenen Punkt gehenden Ebenen, die wir uns in unzählige Ebenenbüschel vertheilt denken können, deren Axen alle durch den Punkt gehenden Geraden sind; sowie aller durch den Punkt gehenden Geraden, die sich in unendlich viele Strahlenbüschel gruppiren lassen, als deren Träger alle durch den Punkt gehenden Ebenen erscheinen: nennt man ein *Strahlenbündel*. Der Punkt, durch welchen alle Elemente des Strahlenbündels gehen, heisst der *Mittelpunkt* desselben.

Das ebene System und das Strahlenbündel erscheinen also ebenso aus Punktreihen, Ebenenbüscheln und Strahlenbüscheln zusammengesetzt, wie diese Gebilde ihrerseits aus den geometrischen Elementen: Punkten, Ebenen und Geraden zusammengesetzt sind; wobei zu bemerken ist, dass die Punktreihe und das Strahlenbüschel als die Elemente des ebenen Systems, das Ebenenbüschel und das Strahlenbüschel aber als die Elemente des Strahlenbündels erscheinen.

Das ebene System und das Strahlenbündel sind daher wieder reciproke Gebilde, in welchen die Punktreihe und das Ebenenbüschel einander entsprechen, während das Strahlenbüschel sich selbst reciprok erscheint.

Für die gegenseitige Bestimmung dieser Gebilde gilt folgender Satz:

Ein ebenes System und ein ausserhalb des Trägers desselben gegebener Punkt bestimmen ein Strahlenbündel, dessen Mittelpunkt der gegebene Punkt ist. Die Punktreihen des ebenen Systems bestimmen die Strahlenbüschel, und die Strahlenbüschel desselben die Ebenenbüschel des Strahlenbündels. Das Strahlenbündel heisst hier wieder ein Schein des ebenen Systems.

Ein Strahlenbündel und eine nicht durch dessen Mittelpunkt gehende Ebene bestimmen ein ebenes System, dessen Träger die gegebene Ebene ist. Die Ebenenbüschel des Strahlenbündels bestimmen die Strahlenbüschel, und die Strahlenbüschel desselben die Punktreihen des ebenen Systems. Das ebene System heisst hier wieder ein Schnitt des Strahlenbündels.

§. 5. In natürlicher Fortsetzung dieser Betrachtungsweise muss man den Raum als die unendliche Menge seiner Punkte, Ebenen und Geraden betrachten. Jede Ebene ist der Träger eines ebenen Systems, jeder Punkt der Mittelpunkt eines Strahlenbündels, jede Gerade der Träger einer Punktreihe oder die Axe eines Ebenenbüschels. Die Punktreihe, das Ebenenbüschel und das Strahlenbüschel, welche durch die geometrischen Elemente: Punkt, Ebene und Gerade unmittelbar gebildet werden, nennt man die Grundgebilde der ersten Stufe. Das ebene System und das Strahlenbündel, welche aus den Grundgebilden der ersten Stufe ebenso zusammengesetzt erscheinen, wie diese aus den geometrischen Elementen, sind die Grundgebilde der zweiten Stufe. Das Grundgebilde der dritten Stufe ist der unendliche Raum, in welchem unendlich viele Grundgebilde der ersten und zweiten Stufe denkbar sind.

Die geometrischen Formen, welche alle durch Reihung oder Bewegung der geometrischen Elemente entstanden gedacht werden können, nennt man Formen oder Gebilde der ersten, zweiten oder dritten Stufe, je nachdem sie sich in

ein Grundgebilde der entsprechenden Stufe einreihen lassen. So bilden mehrere discrete Punkte in einer Geraden, mehrere durch einen Punkt gehende Gerade in einer Ebene, mehrere durch dieselbe Gerade gehende Ebenen, nach bestimmten Gesetzen geordnet, geometrische Gebilde der ersten Stufe. Ebene Figuren, krumme Linien in der Ebene, sowie ein pyramidales oder prismatisches Ebenensystem, Kegel oder Cylinderflächen sind Gebilde der zweiten Stufe, während endlich eckige Körper, Raumcurven und krumme Oberflächen zu den Gebilden der dritten Stufe gerechnet werden müssen.

§. 6. Eine Gerade ist durch zwei Punkte, durch welche sie gehen soll, bestimmt, aber sie erscheint auch vollkommen bestimmt durch einen Punkt und ihre Richtung, welch letztere durch die Bedingung des Parallelseins zu einer zweiten Geraden gegeben ist; ebenso ist eine Ebene durch einen Punkt und eine Gerade, aber auch durch einen Punkt und ihre, durch eine andere Ebene, zu der sie parallel sein soll, gegebene Stellung vollkommen bestimmt. Man sieht also, dass in diesen, sowie in allen anderen Fällen, ein Punkt durch die Richtung einer Geraden, eine Gerade durch die Stellung einer Ebene vertreten sein kann. Die im Folgenden entwickelte Betrachtungsweise lässt uns die Begriffe Richtung und Stellung als besondere Lagen von Punkten und Geraden erkennen.

Wenn in einer Ebene die eine von zwei sich schneidenden Geraden um einen ihrer ausserhalb des Schnittpunktes der beiden Geraden liegenden Punkte gedreht wird, so entfernt sich der Schnittpunkt immer weiter von seiner Anfangslage, bis er bei der parallelen Lage der beiden Geraden verschwindet, in unendliche Entfernung gerückt erscheint. Setzt man die Drehung der Geraden in demselben Sinne weiter fort, so erscheint der Schnittpunkt wieder, aber auf der entgegengesetzten Seite der Anfangslage; bis er endlich, wenn die gedrehte Gerade einen vollen Strahlenbüschel beschrieben hat, wieder in seine anfängliche Lage zurückkehrt. Der Schnittpunkt hat dann die ganze Punktreihe, deren Träger die feste Gerade ist, durchlaufen; es gehört daher zu den Punkten dieser Punktreihe auch der unendlich ferne Punkt, die Richtung der Geraden, als jener Punkt, in welchem

sie von allen zu ihr parallelen Geraden des Raumes geschnitten wird. Die unendlich fernen Punkte aller in einer Ebene liegenden Geraden, welche als die Schnittpunkte aller in der Ebene möglicher Systeme paralleler Geraden erscheinen, denken wir uns in einer Linie vereinigt, welche wir uns, da sie von jeder Geraden in der Ebene nur in einem Punkte, ihrer Richtung, geschnitten wird, als eine Gerade vorstellen müssen, und welche die unendlich ferne Gerade oder die Stellung der Ebene genannt wird; es ist dies zugleich jene Gerade, in welcher die Ebene von jeder zu ihr parallelen Ebene geschnitten wird. Ein System von parallelen Ebenen hat daher eine unendlich ferne Gerade, eine Stellung gemeinsam, welche als die gemeinsame Schnittlinie aller dieser Ebenen erscheint. Alle unendlich fernen Punkte und Geraden, d. s. die Richtungen aller möglichen Geraden und die Stellungen aller möglichen Ebenen des Raumes, können wir uns in einer unendlich fernen Fläche vereinigt denken, welche, da sie von jeder Geraden in einem Punkte, ihrer Richtung, und von jeder Ebene in einer Geraden, ihrer Stellung, getroffen wird, selbst als Ebene erscheint, und als die unendlich ferne Ebene bezeichnet wird. Die Richtungen aller Geraden und die Stellungen aller Ebenen im Raume bilden daher die Punkte und Geraden eines im Unendlichen befindlichen ebenen Systems, dessen Träger die unendlich ferne Ebene ist. Die im Endlichen liegenden Punkte und Geraden werden im Gegensatze zu diesen unendlich fernen Elementen auch eigentliche Punkte und Gerade genannt.

Alle in den vorhergehenden §§. gegebenen Erklärungen und Lehrsätze lassen also eine Erweiterung in der Beziehung zu, dass jedem Punkte eine Richtung, jeder Ebene eine Stellung substituirt werden kann.

So schliesst z. B. der Satz, dass eine Gerade durch zwei Punkte bestimmt ist, zwei besondere Fälle in sich, indem der eine oder auch beide der gegebenen Punkte im Unendlichen liegen können; im ersteren Falle ist die Gerade eine eigentliche Gerade, und durch einen Punkt und ihre Richtung gegeben, im letztern Falle ist sie eine unendlich ferne Gerade, eine Stellung, und durch zwei Richtungen bestimmt. Eine durch zwei Ebenen bestimmte Gerade ist entweder eine

eigentliche Gerade, wenn sich die beiden Ebenen schneiden, oder eine Stellung, wenn die Ebenen parallel sind. Ein unendlich ferner Punkt liegt in einer unendlich fernen Geraden, wenn die Stellung, als welche diese unendlich ferne Gerade erscheint, die durch den unendlich fernen Punkt bezeichnete Richtung enthält. Eine Punktreihe, deren Träger eine unendlich ferne Gerade ist, erscheint daher als der Inbegriff aller möglichen Richtungen, die in einer bestimmten Stellung vorkommen. Ein Strahlenbüschel, dessen Mittelpunkt ein unendlich ferner Punkt seiner Ebene ist, besteht aus Strahlen, die sich in diesem unendlich fernen Punkte schneiden, d. h. zu einander parallel sind; ein solches Strahlenbüschel wird ein Parallelstrahlenbüschel genannt. Sämmtliche Parallelstrahlenbüschel einer Ebene enthalten die unendlich ferne Gerade dieser Ebene, in welcher alle ihre Mittelpunkte liegen, als gemeinsames Element; ebenso wie allen Strahlenbüscheln einer Ebene, deren Mittelpunkte in einer eigentlichen Geraden liegen, diese Gerade als gemeinsamer Strahl angehört. Liegt ein Strahlenbüschel in der unendlich fernen Ebene, so ist sein Mittelpunkt ein unendlich ferner Punkt, eine Richtung, und der Strahlenbüschel selbst erscheint als der Inbegriff aller Stellungen, welche diese Richtung enthalten. Ein Ebenenbüschel, dessen Axe eine unendlich ferne Gerade ist, besteht aus Ebenen, die sich in dieser unendlich fernen Geraden schneiden, mithin parallel sind, und wird ein Parallelebenenbüschel genannt. Die unendlich ferne Ebene erscheint als Element aller Parallelebenenbüschel des Raumes, da alle Axen derselben in dieser Ebene liegen. Ein Strahlenbündel, dessen Mittelpunkt ein unendlich ferner Punkt, eine Richtung ist, enthält als Elemente alle durch diese Richtung gehenden, parallelen Geraden, und alle Ebenen, welche diese Richtung enthalten. Die unendlich ferne Ebene gehört allen im Raume möglichen Parallelstrahlenbündeln an, ebenso wie auch zu den Elementen eines Parallelstrahlenbündels jede unendlich ferne Gerade gehört, die durch seinen unendlich fernen Mittelpunkt geht. Eine Gerade, welche sich bewegt ohne ihre Richtung zu ändern, dreht sich um einen unendlich fernen Punkt; eine Ebene, welche sich bewegt ohne ihre Stellung zu ändern, um eine unendlich ferne Axe.

Methoden der darstellenden Geometrie.

A. Orthogonale Projection.

Darstellung der geometrischen Elemente und der Grundgebilde erster und zweiter Stufe.

§. 7. Um die geometrischen Elemente: Punkt, Ebene und Gerade, und mithin auch alle durch dieselben gebildeten geometrischen Raumformen, auf eine feste gegebene Ebene, die Zeichnungsebene, zu beziehen, und dadurch eine ebene Abbildung derselben zu ermöglichen; benützt man die Projectionen und Spuren der gegebenen Elemente auf der Zeichnungsebene.

Ist ein Punkt im Raume seiner Lage nach gegeben, so ist auch das von ihm auf die Zeichnungsebene gefällte Perpendikel bestimmt. Der Fusspunkt dieses Perpendikels in der Zeichnungsebene heisst die orthogonale Projection des Raumpunktes.

Für jeden gegebenen Raumpunkt ist also seine Projection bestimmt, nicht aber umgekehrt.

Ein gegebener Punkt a' der Zeichnungsebene kann die Projection aller Punkte der Punktreihe sein, deren Träger das durch a' gehende Perpendikel zur Zeichnungsebene ist. Von allen Punkten dieser Reihe sind durch die Projection allein nur zwei Punkte bestimmt, und zwar der in der Zeichnungs-

Ist eine Ebene im Raume ihrer Lage nach gegeben, so ist auch die Schnittlinie derselben mit der Zeichnungsebene bestimmt. Diese Gerade in der Zeichnungsebene heisst die Spur der gegebenen Raumebene.

Für jede gegebene Ebene im Raume ist also ihre Spur bestimmt, nicht aber umgekehrt.

Eine gegebene Gerade A_1 in der Zeichnungsebene kann die Spur aller Ebenen des Ebenenbüschels sein, dessen Axe die in der Zeichnungsebene gegebene Gerade A_1 ist. Von allen Ebenen dieses Büschels sind durch die Spur allein nur zwei Ebenen bestimmt, und zwar die zur Zeichnungsebene

ebene gelegene Punkt a' selbst, und der unendlich ferne Punkt, die Richtung des Perpendikels. Dieser letztere Punkt ist aber allen Perpendikeln zur Zeichnungsebene gemeinsam, für denselben verschwindet daher der angenommene Punkt a' als specielle Projection.

Eine Gerade im Raume bestimmt die durch sie gehende Normalebene zur Zeichnungsebene; der Schnitt derselben mit der Zeichnungsebene heisst die Projection der Raumgeraden. Die Projectionen aller Punkte der Geraden fallen in die Projection der Geraden.

Durch die Projection einer Geraden ist die Lage derselben im Raume noch nicht vollkommen bestimmt, da alle Geraden eines ebenen Systems, dessen Träger eine Normalebene zur Zeichnungsebene ist, eine gemeinsame Projection haben.

senkrechte Ebene, d. i. die Normalebene durch A_1, und die Zeichnungsebene selbst. Diese letztere Ebene ist aber allen diesen Ebenenbüscheln, deren Axen in der Zeichnungsebene liegen, gemeinsam, für dieselbe verschwindet daher die angenommene Gerade A_1 als specielle Spur.

Eine Gerade im Raume bestimmt ihren Schnittpunkt mit der Zeichnungsebene; dieser Punkt heisst die Spur der Raumgeraden. Die Spuren aller durch die Gerade gelegten Ebenen gehen durch die Spur der Geraden.

Durch die Spur einer Geraden ist die Lage derselben im Raume noch nicht vollkommen bestimmt, da alle Geraden eines Strahlenbündels, dessen Mittelpunkt ein Punkt der Zeichnungsebene ist, eine gemeinsame Spur haben.

§. 8. Durch Projection oder Spur in Beziehung auf nur eine Zeichnungsebene ist also keines der geometrischen Elemente vollkommen bestimmt. Nehmen wir aber eine zweite Ebene an, die man sich zur ersten senkrecht denkt, und beziehen die Punkte, Ebenen und Geraden im Raume durch ihre Projectionen oder Spuren auch auf diese Ebene, so ist ein Punkt durch seine beiden Projectionen, als Schnittpunkt der beiden projicirenden Perpendikel, eine Ebene durch ihre beiden Spuren, als die Verbindungsebene dieser zwei Geraden, und endlich eine Gerade durch ihre Projectionen oder Spuren, als Schnittlinie der zwei Normalebenen, oder als Verbindungsgerade der beiden Spurpunkte, vollkommen bestimmt.

Durch die Spuren und Projectionen in Beziehung auf zwei zu einander senkrechten Ebenen sind also die geometrischen Elemente, und daher auch alle durch sie erzeugte Raumformen bestimmt. Nimmt man in der gemeinsamen Schnittlinie dieser zwei zu einander senkrechten Ebenen noch einen Anfangspunkt O an, und legt durch denselben eine dritte, zu den beiden andern senkrechte Ebene, so können in dieses Projectionssystem die Projectionen und Spuren der geometrischen Elemente auch nach gegebenen Maassen eingezeichnet werden.

Wir erhalten so drei auf einander senkrechte Projections- oder Zeichnungsebenen XOY, XOZ, YOZ (Fig. 1 a b, Taf. I.), von denen die erste, horizontal liegend angenommen, auch Horizontalebene heisst, die beiden auf ihr Senkrechten aber Vertical- und Kreuzrissebene genannt werden. Diese drei Ebenen schneiden sich in den drei zu einander senkrechten Geraden OX, OY und OZ, Projectionsaxen genannt, von welchen Axen je zwei in einer Projectionsebene liegen, während die dritte die Richtung der Perpendikel zu dieser Ebene angibt. Es entstehen somit drei Projectionen oder Spuren jeder Raumform, die wir als erste, zweite und dritte (Horizontal-, Vertical- und Kreuzriss-) Projection oder Spur benennen, und durch rechts neben dem Zeichen der Raumform angebrachte Zeiger unterscheiden.

Zur Lagenbestimmung eines Punktes und einer Ebene in Beziehung auf dieses so vorgerichtete Projectionssystem benützen wir bezüglich des Punktes die Abstände desselben von den drei Projectionsebenen, und bezüglich der Ebene die Entfernungen der Schnittpunkte derselben mit den drei Projectionsaxen vom Anfangspunkte O.

Diese Grössen nennen wir die Coordinaten des Punktes und der Ebene, und bezeichnen sie, jenachdem sie parallel zu, beziehungsweise auf den Axen OX, OY und OZ gemessen sind, mit x, y, z für den Punkt, und X, Y, Z für die Ebene.

Die drei Coordinaten eines Punktes a (Fig. 1a, Taf. I.) bestimmen drei Ebenen aa_x, aa_y, aa_z, welche in den gegebenen Abständen zu den Pro-

Die drei Coordinaten einer Ebene A (Fig. 1b, Taf. I.) bestimmen drei Punkte A_x, A_y, A_z in den Projectionsaxen, welche vom Anfangspunkte O die

jectionsebenen parallel gelegt sind, und in ihrem Durchschnittspunkte a den Raumpunkt bestimmen. Diese drei Ebenen schneiden sich paarweise in den drei zu den Projectionsebenen senkrechten Geraden aa', aa'', aa''', welche die projicirenden Perpendikel des gegebenen Punktes sind, und in ihren Schnittpunkten mit den drei Projectionsebenen die Projectionen a', a'' und a''' des Punktes ergeben.

Durch die Coordinate x ist die durch den Punkt a parallel zur Ebene YOZ gelegte Ebene aa_x gegeben, und durch die Schnittlinien derselben mit den Ebenen XOY und XOZ sind zwei sich im Punkte a_x der Axe OX schneidende, zu dieser Axe senkrechte Gerade $a_x a'$ und $a_x a''$ in diesen Ebenen bestimmt, in welchen die erste und zweite Projection a' und a'' des Punktes liegen müssen. Ebenso bestimmt die Coordinate y zwei sich in der Axe OY schneidende, zu derselben senkrechte Gerade $a_y a'$, und $a_y a'''$ in den Ebenen XOY und YOZ, in welchen die erste und dritte Projection des Punktes liegen. Durch diese beiden Coordinaten ist also die erste (Horizontal-) Projection des Raumpunktes vollkommen bestimmt, während von den bei-

angegebenen Entfernungen haben, und in der durch sie gelegten Ebene A die Raumebene bestimmen. Diese drei Punkte geben paarweise drei Verbindungsgerade $A_x A_y$, $A_x A_z$, $A_y A_z$, welche in den Projectionsebenen liegen, und die Spuren A_1, A_2 und A_3 der gegebenen Ebene sind.

Durch die Coordinate X ist der in der Axe OX liegende Schnittpunkt A_x der Ebene A mit dieser Axe gegeben; dieser Punkt, der in den Ebenen XOY und XOZ gemeinschaftlich liegt, ist also ein Punkt der Schnittlinien der gegebenen Ebene mit diesen beiden Projectionsebenen, es müssen daher die erste und zweite Spur A_1 und A_2 der gegebenen Ebene durch ihn gehen. Ebenso bestimmt die Coordinate Y einen in der Axe OY, mithin in den Ebenen YOZ und XOY gelegenen Punkt A_y, durch welchen die erste und dritte Spur der Ebene gehen müssen. Durch diese beiden Coordinaten ist also die erste (Horizontal-) Spur der Raumebene vollkommen bestimmt, während von den beiden andern Spuren je ein Punkt gegeben ist, durch welchen sie

den andern Projectionen je eine Gerade gegeben ist, in welcher sie liegen müssen. In den Schnittpunkten dieser Geraden mit den durch die dritte Coordinate z bestimmten Senkrechten $a_z a''$ und $a_z a'''$ zur Axe OZ, sind dann auch die zweite und dritte Projection a'' und a''' des Punktes bestimmt.

Die drei Projectionen eines Punktes liegen also paarweise in zwei, von einem Punkte der zwischenliegenden Axe ausgehenden Senkrechten zu dieser Axe. Die Abstände dieser drei Punkte in den Axen vom Anfangspunkte O sind den Coordinaten des Punktes gleich.

gehen müssen. In den Verbindungsgeraden dieser Punkte mit dem durch die dritte Coordinate Z bestimmten Punkte A_z in der Axe OZ, sind dann auch die zweite und dritte Spur, A_2 und A_3, der Ebene bestimmt.

Die drei Spuren einer Ebene schneiden sich also paarweise in einem Punkte der zwischenliegenden Axe. Die Abstände dieser drei Punkte in den Axen vom Anfangspunkte O sind die drei Coordinaten der Ebene.

§. 9. Die drei Projectionsebenen, in welchen die so gewonnenen Projectionen und Spuren, die Bestimmungselemente der Raumformen enthalten sind, müssen noch zum Zwecke der zeichnenden Darstellung in eine einzige Ebene, die Zeichnungsebene, vereinigt werden. Um dies zu erreichen, denken wir uns eine der Ebenen, z. B. die Verticalebene XOZ, als Zeichnungsebene, und drehen die beiden andern Projectionsebenen, die Horizontalebene XOY und die Kreuzrissebene YOZ um ihre Schnittlinien mit der Ebene XOZ, d. i. um die Projectionsaxen OX und OZ, so lange, bis sie mit der festen Ebene XOZ zusammenfallen. Bei dieser Drehung bleiben die Axen OX und OZ, als die Axen der Drehung, unverändert, während die dritte Axe OY, die zur Zeichnungsebene senkrecht ist, und in den beiden gedrehten Ebenen XOY und YOZ liegt, mit diesen Ebenen eine doppelte Drehung erfährt; und zwar fällt sie, mit der Ebene XOY gedreht, nach der Drehung mit der in der Zeichnungsebene befindlichen Axe OZ zusammen, während sie durch die Drehung der Ebene YOZ mit der Axe OX zusammenfällt.

Jede der Axen OX, OY und OZ wird durch den An-

fangspunkt O in zwei halbbegrenzte Stücke zerlegt, welche, vom Punkte O ausgehend, zwei entgegengesetzte Richtungen darstellen. Alle Punkt- und Ebenen-Coordinaten werden nun ebenfalls diesen Richtungsunterschied aufweisen, je nachdem sie nach der Richtung des einen oder des andern Axentheils gemessen werden. Diese Unterschiede der Richtung in den Coordinatenbestimmungen werden durch den Gegensatz der algebraischen Zeichen $+$ und $-$ bezeichnet, und zwar so, dass eine bestimmte Axenrichtung als positiv, die entgegengesetzte als negativ bezeichnet wird. Bei der festgestellten Lage der Projectionsebenen bezeichnen wir als positive Axentheile den Theil der OX rechts von der Kreuzrissebene, den Theil der OY vor der Verticalebene, und den Theil der OZ ober der Horizontalebene. Zur Feststellung des Drehungssinnes der Ebenen XOY und YOZ genügt dann die Angabe, dass der positive Theil der Axe OY durch die Drehung der Horizontalebene auf den negativen Theil der OZ, und durch die Drehung der Kreuzrissebene auf den negativen Theil der OX zu liegen kommt.

Jede der drei Projectionsebenen zerfällt durch die zwei in ihr liegenden Axen, d. i. ihre Schnittlinien mit den beiden andern Projectionsebenen, in vier Quadranten, welche durch die vier Zeichencombinationen $++$, $+-$, $-+$ und $--$ bezeichnet werden können, je nachdem sie von den positiven oder negativen Theilen der betreffenden Axen eingeschlossen werden. So bezeichnet z. B. die Combination $++$: den vor der Vertical- und rechts von der Kreuzrissebene gelegenen Theil der Horizontalebene; ebenso den Theil der Verticalebene, der ober der Horizontal- und rechts von der Kreuzrissebene liegt, und endlich den vor der Vertical- und ober der Horizontalebene gelegenen Theil der Kreuzrissebene u. s. f.

Nach der Vereinigung der drei Projectionsebenen in der Zeichnungsebene erscheinen in dieser letztern zwei auf einander senkrechte Gerade, welche wir als die erste und zweite Axe der Zeichnungsebene bezeichnen wollen, und von welchen in der ersten die Axen OX und OY, in der zweiten die Axen OZ und OY des Projectionssystems vereinigt sind. Diese Axen theilen die Zeichnungsebene in vier Quadranten, und

je nachdem wir die Zeichnungsebene als eine der drei in ihr vereinigten Projectionsebenen XOY, XOZ und YOZ betrachten, stellen die zwei Axen derselben die Axenpaare OX und OY, OX und OZ, oder OY und OZ dar, während jeder der vier Quadranten der Zeichnungsebene mit einem der Quadranten jeder der drei Projectionsebenen zusammenfällt, in welche dieselben durch die in ihnen befindlichen Axen getheilt werden.

Jeder Punkt der Axe OY erscheint daher in der Zeichnungsebene doppelt, je nachdem er als Punkt der Ebene XOY oder der Ebene YOZ betrachtet wird; je zwei so zusammengehörige Punkte dieser Projectionsaxe liegen in den beiden Axen der Zeichnungsebene in gleichem Abstande vom Anfangspunkte O.

Sowie die in den einzelnen Projectionsebenen liegenden Axen nach der Vereinigung der Projectionsebenen in den beiden Axen der Zeichnungsebene zusammenfallen, so fallen auch die unendlich fernen Geraden der drei Projectionsebenen, welche die Richtungen aller Geraden derselben enthalten, in der unendlich fernen Geraden der Zeichnungsebene zusammen.

§. 10. Nach diesen Bemerkungen über die Eigenschaften des Projectionssystems und die Vereinigung der Projectionsebenen können wir an die Lösung der Aufgabe gehen, die Projectionen eines durch seine Coordinaten gegebenen Punktes und die Spuren einer durch ihre Coordinaten gegebenen Ebene in der Zeichnungsebene darzustellen.

Gemäss der im §. 8 gegebenen Gesetze des Zusammenhanges zwischen den Coordinaten und Projectionen eines Punktes erhält man die erste Projection a' eines durch die Coordinaten x, y und z gegebenen Punktes a, wenn man, die Zeichnungsebene als Horizontalebene betrachtend, die durch die Coordinaten x und y gegebenen Strecken in der ihrem

Gemäss der im §. 8 gegebenen Gesetze des Zusammenhanges zwischen den Coordinaten und den Spuren einer Ebene erhält man die erste Spur A_1 einer durch die Coordinaten X, Y und Z gegebenen Ebene A, wenn man, die Zeichnungsebene als Horizontalebene betrachtend, die durch die Coordinaten X und Y gegebenen Strecken in der ihrem

Zeichen entsprechenden Richtung auf die Axen OX und OY (erste und zweite Axe der Zeichnungsebene) aufträgt. Die in den Endpunkten dieser Strecken errichteten Senkrechten zu den betreffenden Axen schneiden sich in der gesuchten Horizontalprojection a' des Punktes. Auf gleiche Weise geben die Coordinaten x und z, die Zeichnungsebene als Verticalebene betrachtet, zwei Perpendikel zu den Axen OX und OZ, die in ihrem Schnittpunkte die zweite Projection a'' des Punktes ergeben; ebenso erhält man durch die Coordinaten y und z die dritte Projection a''' in der als Kreuzrissebene betrachteten Zeichnungsebene. (Fig. 2a, Taf. I.)

Zeichen entsprechenden Richtung auf die Axen OX und OY (erste und zweite Axe der Zeichnungsebene) aufträgt. Die Verbindungslinie der beiden Endpunkte dieser Strecken gibt die gesuchte Horizontalspur A_1 der Ebene. Auf gleiche Weise geben die Coordinaten X und Z, die Zeichnungsebene als Verticalebene betrachtet, zwei Punkte in den Axen OX und OZ, die in ihrer Verbindungslinie die zweite Spur A_2 der Ebene ergeben; ebenso erhält man durch die Coordinaten Y und Z die dritte Spur A_3 in der als Kreuzrissebene betrachteten Zeichnungsebene. (Fig. 2b, Taf. I.)

Da die Axe OX nach der Vereinigung der Projectionsebenen, — die Zeichnungsebene sowohl als Horizontalebene, wie auch als Verticalebene betrachtet, — durch die erste Axe der Zeichnungsebene dargestellt erscheint;

so müssen die, von dem Punkte dieser Axe, welcher der Coordinate x entspricht, ausgehenden, in den Ebenen XOY und XOZ gezogenen Perpendikel in eine zur ersten Axe der Zeichnungsebene senkrechte Gerade zusammenfallen. Ebenso fallen die Perpendikel, welche von dem der Coordinate z entsprechenden Punkte der Axe OZ aus, in den Ebenen XOZ und YOZ gezogen sind, in eine

so muss auch der, der Coordinate X entsprechende Punkt dieser Axe, sowohl in der Ebene XOY, als in der Ebene XOZ liegend betrachtet, durch denselben Punkt der ersten Axe der Zeichnungsebene dargestellt erscheinen. Ebenso gibt der der Coordinate Z entsprechende Punkt der Axe OZ nach der Vereinigung der Projectionsebenen nur einen Punkt in der zweiten Axe der Zeich-

zur zweiten Axe der Zeichnungsebene senkrechte Gerade zusammen; so dass der allgemeine Lehrsatz folgt:

Die erste und zweite Projection eines Punktes liegen immer in derselben Senkrechten zur ersten, die zweite und dritte Projection in derselben Senkrechten zur zweiten Axe der Zeichnungsebene.

nungsebene; so dass der allgemeine Lehrsatz folgt:

Die erste und zweite Spur einer Ebene schneiden sich immer in demselben Punkte der ersten, die zweite und dritte Spur in demselben Punkte der zweiten Axe der Zeichnungsebene.

Der der Coordinate y (Y) entsprechende Punkt der Axe OY erscheint jedoch, wie diese Axe selbst, nach der Vereinigung der Projectionsebenen in der Zeichnungsebene doppelt, in zwei, in gleichen Abständen vom Anfangspunkte O gelegenen Punkten der ersten und zweiten Axe der Zeichnungsebene, je nachdem man dieselbe als Kreuzriss- oder Horizontalebene betrachtet. Daher folgt:

Die Senkrechten von der Horizontalprojection eines Punktes zur zweiten, und von der Kreuzrissprojection zur ersten Axe der Zeichnungsebene müssen diese Axen in Punkten schneiden, welche denselben Abstand vom Anfangspunkte O haben; sie liegen also in einem Kreisbogen, der vom Mittelpunkte O aus mit der Coordinate y als Radius beschrieben wird.

Die Schnittpunkte der Horizontalspur einer Ebene mit der zweiten, und der Kreuzrissspur mit der ersten Axe der Zeichnungsebene haben gleichen Abstand vom Anfangspunkte O; sie liegen also in einem Kreisbogen, der vom Mittelpunkte O aus mit der Coordinate Y als Radius beschrieben wird.

Ein Punkt im Raume wird mithin durch drei Punkte in der Zeichnungsebene, seine drei Projectionen, dargestellt; welche Punkte aber, damit sie als Projectionen demselben Raumpunkte angehören können, bezüglich ihrer gegenseitigen

Eine Ebene im Raume wird mithin durch drei Gerade in der Zeichnungsebene, ihre drei Spuren, dargestellt; welche Gerade aber, damit sie als Spuren derselben Raumebene angehören können, bezüglich ihrer gegenseitigen Lage den oben

Lage den oben angegebenen Bedingungen genügen müssen.

Will man irgend einen willkürlichen Punkt a im Raume durch seine drei Projectionen in der Zeichnungsebene darstellen, so kann man nur eine derselben, z. B. die Horizontalprojection a', als beliebigen Punkt der Zeichnungsebene annehmen. Die Abstände dieses Punktes von der ersten und zweiten Axe der Zeichnungsebene geben die Coordinaten y und x des Raumpunktes. Die beiden andern Projectionen sind dann insoweit bestimmt, als sie in den durch die erste Projection bestimmten Senkrechten zu den Axen (die doppelte Darstellung der Axe OY nach Obigem berücksichtigt) liegen müssen. Durch die Annahme einer zweiten Projection in einer dieser Senkrechten ist die Lage des Punktes im Raume und mithin auch seine dritte Projection, als Schnittpunkt zweier Senkrechten zu den Axen, bestimmt.

angegebenen Bedingungen genügen müssen.

Will man irgend eine willkürliche Ebene A im Raume durch ihre drei Spuren in der Zeichnungsebene darstellen, so kann man nur eine derselben, z. B. die Horizontalspur A_1, als beliebige Gerade der Zeichnungsebene annehmen. Die Strecken, welche diese Gerade auf der ersten und zweiten Axe der Zeichnungsebene abschneidet, geben die Coordinaten X und Y der Raumebene. Die beiden andern Spuren sind dann insoweit bestimmt, als sie durch die Schnittpunkte der ersten Spur mit den Axen (die doppelte Darstellung der Axe OY nach Obigem berücksichtigt) gehen müssen. Durch die Annahme einer zweiten, durch einen dieser Schnittpunkte gehenden Spur ist die Lage der Ebene im Raume und mithin auch ihre dritte Spur, als Verbinbindungslinie zweier Punkte in den Axen, bestimmt.

§. 11. Ein Punkt, dessen Coordinaten $x = a$, $y = b$, $z = c$, drei endliche, von 0 verschiedene Werthe haben, der also von jeder der Projectionsebenen einen endlichen Abstand hat, kann in keiner der Projectionsebenen liegen. Da jede der drei Coordinaten eines Punk-

Eine Ebene, deren Coordinaten $X = A$, $Y = B$, $Z = C$, drei endliche, von 0 verschiedene Werthe haben, die also jede der Axen in einem endlichen Abstande vom Anfangspunkte schneidet, kann zu keiner der Axen parallel sein. Da jede der drei Coordinaten einer

tes in zwei entgegengesetzten, durch die Zeichen + oder — unterschiedenen Richtungen gemessen werden kann, so geben dieselben drei Strecken a, b, c als Coordinaten eines Punktes acht verschiedene Punkte im Raume, nämlich so viele, als Versetzungen der Zeichen + und — bei den drei Coordinatenwerthen möglich sind. Die Coordinaten dieser 8 Punkte sind:

$x = +a,\ y = +b,\ z = +c;$
$x = -a,\ y = +b,\ z = +c;$
$x = -a,\ y = -b,\ z = +c;$
$x = +a,\ y = -b,\ z = +c;$
$x = +a,\ y = +b,\ z = -c;$
$x = -a,\ y = +b,\ z = -c;$
$x = -a,\ y = -b,\ z = -c;$
$x = +a,\ y = -b,\ z = -c;$

Die Darstellung dieser 8 Punkte durch ihre Projectionen ergibt sich leicht durch Anwendung der Gesetze des §. 10. — Fig. 3a, Taf. I., gibt als Beispiel die Darstellung eines Punktes von den Coordinaten $x = +1$, $y = -2$, $z = -3$.

Ebene in zwei entgegengesetzten, durch die Zeichen + oder — unterschiedenen Richtungen gemessen werden kann, so geben dieselben drei Strecken A, B, C als Coordinaten einer Ebene acht verschiedene Ebenen im Raume, nämlich so viele, als Versetzungen der Zeichen + und — bei den drei Coordinatenwerthen möglich sind. Die Coordinaten dieser 8 Ebenen sind:

$X = +A,\ Y = +B,\ Z = +C;$
$X = -A,\ Y = +B,\ Z = +C;$
$X = -A,\ Y = -B,\ Z = +C;$
$X = +A,\ Y = -B,\ Z = +C;$
$X = +A,\ Y = +B,\ Z = -C;$
$X = -A,\ Y = +B,\ Z = -C;$
$X = -A,\ Y = -B,\ Z = -C;$
$X = +A,\ Y = -B,\ Z = -C;$

Die Darstellung dieser 8 Ebenen durch ihre Spuren ergibt sich leicht durch Anwendung der Gesetze des §. 10. — Fig. 3b, Taf. I., gibt als Beispiel die Darstellung einer Ebene mit den Coordinaten $X = +1$, $Y = -2$, $Z = -3$.

Führt man die Darstellung von 8 solchen $\left\{\begin{matrix}\text{Punkten}\\\text{Ebenen}\end{matrix}\right\}$, welche numerisch gleiche Coordinaten haben, durch, so ergeben sich durch Vergleichung dieser Darstellungen folgende Lehrsätze für derlei $\left\{\begin{matrix}\text{Punkte}\\\text{Ebenen}\end{matrix}\right\}$:

Je zwei Punkte, welche zwei Coordinaten gleich, die dritte aber entgegengesetzt bezeichnet haben, besitzen eine Projection gemeinsam, liegen also in

Je zwei Ebenen, welche zwei Coordinaten gleich, die dritte aber entgegengesetzt bezeichnet haben, besitzen eine Spur gemeinsam, schneiden sich also

demselben Perpendikel zur entsprechenden Projectionsebene; die beiden andern Projectionen haben von den beiden Axen dieser Projectionsebene bei beiden Punkten gleiche, aber entgegengesetzt gelegene Abstände.

Bei zwei solchen Punkten mit nur einer gleich bezeichneten Coordinate liegen die beiden Paare von Projectionen dieser Punkte, deren Lage durch die gleichbezeichnete Coordinate bedingt ist, in derselben Senkrechten zur entsprechenden Axe, in gleichen, aber entgegengesetzten Abständen von derselben. Die dritten Projectionen beider Punkte liegen in einer durch den Anfangspunkt O gehenden Geraden.

Sind alle drei Coordinaten zweier solcher Punkte entgegengesetzt bezeichnet, so gehen die Verbindungsgeraden aller drei Paare entsprechender Projectionen durch den Anfangspunkt. Die beiden Raumpunkte selbst liegen in einer durch den Anfangspunkt gehenden Geraden.

Ist eine der drei Coordinaten eines Punktes, z. B. $x = 0$, so liegt der Punkt in der entsprechenden Projectionsebene, hier YOZ; seine Horizontal- und Verticalprojection liegen daher in den Axen OY und OZ,

in dieser Geraden der entsprechenden Projectionsebene; die beiden andern Spuren schliessen mit den beiden Axen dieser Projectionsebene bei beiden Ebenen gleiche, aber durch entgegengesetzte Drehung erzeugte Winkel ein.

Bei zwei solchen Ebenen mit nur einer gleich bezeichneten Coordinate schneiden sich die beiden Paare von Spuren dieser Ebenen, deren Lage durch die gleichbezeichnete Coordinate bedingt ist, in demselben Punkte der entsprechenden Axe, mit welcher sie gleiche, aber entgegengesetzte Winkel einschliessen. Die dritten Spuren beider Ebenen schneiden sich in einem Punkte der unendlich fernen Geraden, sind parallel.

Sind alle drei Coordinaten zweier solcher Ebenen entgegengesetzt bezeichnet, so liegen die Schnittpunkte aller drei Paare entsprechender Spuren in unendlicher Entfernung. Die beiden Raumebenen selbst schneiden sich in einer unendlich fernen Geraden, d. h. sind zu einander parallel.

Ist eine der drei Coordinaten einer Ebene, z. B. $X = \infty$, so geht die Ebene durch den unendlich fernen Punkt der entsprechenden Axe, hier OX; ihre Horizontal- und Verticalspur sind zur Axe OX paral-

welche Axen in der zweiten Axe der Zeichnungsebene zusammenfallen. Da jeder solche in einer Projectionsebene liegende Punkt zugleich seine eigene Projection in dieser Ebene ist, so geht auch die entsprechende Spur jeder durch ihn gelegten Ebene durch die betreffende Projection des Punktes. — Fig. 4a, Taf. I, zeigt die Darstellung eines solchen in der Horizontalebene liegenden Punktes ($z = 0$).

lel, mithin zu den Axen OY und OZ, welche in der zweiten Axe der Zeichnungsebene zusammenfallen, senkrecht. Da jede solche, zu einer Axe parallele Ebene die Richtung der Perpendikel zu der auf dieser Axe senkrechten Projectionsebene enthält, so liegt auch die entsprechende Projection jedes in ihr liegenden Punktes in der betreffenden Spur der Ebene. — Fig. 4b, Taf. I, zeigt die Darstellung einer solchen zur Horizontalebene senkrechten Ebene ($Z = \infty$).

Sind zwei Coordinaten eines Punktes, z. B. x und y, gleich 0, so liegt der Punkt in zwei Projectionsebenen, hier in der Vertical- und Kreuzrissebene, mithin auch in der zwischenliegenden Axe OZ; zwei seiner Projectionen, die Vertical- und Kreuzrissprojection, liegen in dieser Axe, während die Horizontalprojection in den Axenschnittpunkt fällt. — Fig. 5a, Taf. I, gibt die Darstellung eines solchen in der Axe OY liegenden Punktes ($x = 0$, $z = 0$).

Sind zwei Coordinaten einer Ebene, z. B. X und Y, gleich ∞, so ist die Ebene zu zwei Axen, hier OX und OY, mithin zur durchgelegten Projectionsebene, der Horizontalebene, parallel; zwei ihrer Spuren, die Vertical- und Kreuzrissspur, sind zu dieser Projectionsebene parallel, während die Horizontalspur in die unendlich ferne Gerade der Zeichnungsebene fällt. — Fig. 5b, Taf. I, gibt die Darstellung einer solchen zur Verticalebene parallelen Ebene ($X = \infty$, $Z = \infty$).

Der Punkt, dessen drei Coordinaten x, y und z gleich 0 sind, ist der Anfangspunkt des Projectionssystems, seine drei Projectionen fallen in dem Schnittpunkte der Axen der Zeichnungsebene zusammen.

Die Ebene, deren drei Coordinaten X, Y und Z gleich ∞ sind, ist die unendlich ferne Ebene des Raumes, ihre drei Spuren fallen in der unendlich fernen Geraden der Zeichnungsebene zusammen.

Ist eine der Coordinaten eines Punktes gleich ∞, so liegt der Punkt in der unendlich fernen Ebene des Raumes, ist also selbst ein unendlich ferner Punkt, eine Richtung.

Hierbei sind drei Fälle zu unterscheiden, je nachdem der Punkt ein beliebiger Punkt der unendlich fernen Ebene ist, in der unendlich fernen Geraden einer Projectionsebene liegt, oder die Richtung einer Projectionsaxe ist. Im ersten Falle sind alle drei Coordinaten des Punktes ∞, im zweiten wird eine, im dritten Falle werden zwei Coordinaten unbestimmt sein, während die beiden andern, beziehungsweise die dritte Coordinate, ∞ sind.

Die Projectionen eines solchen Punktes der unendlich fernen Ebene sind unendlich ferne Punkte, bestimmte Richtungen in der Zeichnungsebene, und sind im ersten Falle alle drei Projectionen von den Richtungen der Axen verschieden; im zweiten Falle sind zwei Projectionen die Richtungen der in der betreffenden Projectionsebene liegenden Axen, die dritte Projection aber eine beliebige Richtung; im dritten Falle endlich fallen zwei Projectionen mit der Richtung der betreffenden Axe zusammen, wäh-

Ist eine der Coordinaten einer Ebene gleich 0, so geht die Ebene durch den Anfangspunkt, gehört also dem Strahlenbündel an, dessen Mittelpunkt der Anfangspunkt ist.

Hierbei sind drei Fälle zu unterscheiden, je nachdem die Ebene eine beliebige Ebene dieses Strahlenbündels ist, durch eine Axe geht, oder mit einer der Projectionsebenen zusammenfällt. Im ersten Falle sind alle drei Coordinaten der Ebene gleich 0, im zweiten wird eine, im dritten Falle werden zwei Coordinaten unbestimmt sein, während die beiden andern, beziehungsweise die dritte Coordinate, gleich 0 sind.

Die Spuren einer solchen durch den Anfangspunkt gehenden Ebene sind Gerade, die durch den Schnittpunkt der Axen der Zeichnungsebene gehen, und sind im ersten Falle alle drei Spuren schief zu den Axen, im zweiten Falle liegen zwei Spuren in der Axe, durch welche die Ebene geht, die dritte Spur ist zu den Axen schief; im dritten Falle endlich sind zwei Spuren die in der betreffenden Projectionsebene liegenden Axen, während die dritte Spur, da die Ebene mit der betreffenden Projections-

rend die dritte Projection, da alle Perpendikel zu dieser Ebene durch den gegebenen Punkt gehen, unbestimmt bleibt.

Ist der Punkt ein beliebiger Punkt der unendlich fernen Ebene, so können von den drei, seine Projectionen darstellenden Richtungen der Zeichnungsebene nur zwei willkürlich angenommen werden, während die dritte durch die beiden angenommenen bereits bestimmt erscheint. Die Auffindung der dritten Projection aus den beiden gegebenen kann aber, da hier die allgemeinen Gesetze für den Zusammenhang der Projectionen eines Punktes keine Anwendung finden, erst später, nach der Betrachtung der Darstellungsarten der Geraden angegeben werden.

§. 12. Eine besondere Berücksichtigung verdienen noch die Darstellung und Lagenverhältnisse solcher Punkte, bei denen zwei oder alle drei Coordinatenwerthe numerisch gleich sind. Bezeichnet man einen Punkt, dessen Coordinaten $x = a$, $y = b$, $z = c$ sind, kurz durch (a, b, c), so bezeichnet $(a, \pm a, b)$ einen Punkt, dessen Coordinatenwerthe x und y gleich gross, gleich oder entgegengesetzt bezeichnet sind. Alle solche Punkte gehören zwei ebenen

ebene zusammenfällt, unbestimmt bleibt.

Ist die Ebene eine beliebige Ebene des durch den Anfangspunkt gehenden Strahlenbündels, so können von den drei, ihre Spuren darstellenden, durch den Axenschnittpunkt gehenden Geraden, nur zwei willkürlich angenommen werden, während die dritte durch die beiden angenommenen bereits bestimmt erscheint. Die Auffindung der dritten Spur aus den beiden gegebenen kann aber, da hier die allgemeinen Gesetze für den Zusammenhang der Spuren einer Ebene keine Anwendung finden, erst später, nach der Betrachtung der Darstellungsarten der Geraden angegeben werden.

Eine besondere Berücksichtigung verdienen noch die Darstellung und Lagenverhältnisse solcher Ebenen, bei denen zwei oder alle drei Coordinatenwerthe numerisch gleich sind. Bezeichnet man eine Ebene, deren Coordinaten $X = A$, $Y = B$, $Z = C$ sind, kurz durch (A, B, C), so bezeichnet $(A, \pm A, B)$ eine Ebene, deren Coordinaten X und Y gleich gross, gleich oder entgegengesetzt bezeichnet sind. Alle solchen Ebenen gehören zwei Parallelstrahlenbündeln

Systemen an, deren Träger zwei durch die Axe OZ gehende und die Winkel der Projectionsebenen YOZ und XOZ halbirende Ebenen sind. Die eine dieser Ebenen, H_z, enthält die Punkte von gleichem, die andere, $H_{z'}$, die von entgegengesetztem Sinne der Coordinaten x und y. Ebenso vertheilen sich die Punkte $(a, b, \pm a)$, deren Coordinaten x und z gleiche numerische Werthe haben, in zwei durch die Axe OY gehende und den Winkel der durch diese Axe gehenden Projectionsebenen halbirende Ebenen H_y und $H_{y'}$; und endlich liegen auch die Punkte $(b, a, \pm a)$ in zwei durch die Axe OX gehenden Halbirungsebenen H_x und $H_{x'}$.

Diese 6 Ebenen nennen wir die Halbirungsebenen des Projectionssystems, und jeder in einer solchen Ebene liegende Punkt hat von zwei Projectionsebenen gleich grosse Abstände.

Die Punkte (a, a, a), deren Coordinaten alle drei gleich gross und im gleichen Sinne genommen sind, liegen in einer durch den Anfangspunkt gehenden Geraden μ, welche als die gemeinsame Schnittlinie der Ebenen H_x, H_y, H_z erscheint; ebenso liegen die Punkte $(-a, a, a)$ in der Durchschnittslinie μ_x der Ebenen H_x, $H_{y'}$, $H_{z'}$; die

an, deren Mittelpunkte die zwei Richtungen der Ebene XOY sind, welche gegen die Axen dieser Ebene gleiche Neigung haben. Der einen dieser Richtungen, r_z, gehören die Ebenen von gleichem, der andern, $r_{z'}$, die von entgegengesetztem Sinne der Coordinaten X und Y. Ebenso gehen die Ebenen $(A, B, \pm A)$, deren Coordinaten X und Z gleiche numerische Werthe haben, durch zwei in der Ebene XOZ liegende, und gegen die in dieser Ebene liegenden Axen gleich geneigte Richtungen r_y und $r_{y'}$; und endlich gehen auch die Ebenen $(B, A, \pm A)$ durch zwei in der Ebene YOZ liegende, gegen die Axen gleichgeneigte Richtungen r_x und $r_{x'}$.

Diese 6 Richtungen nennen wir die Richtungen gleicher Neigung des Projectionssystems, und jede durch eine solche Richtung gehende Ebene schliesst mit zwei Projectionsebenen gleiche Winkel ein.

Die Ebenen (A, A, A), deren Coordinaten alle drei gleich gross und im gleichen Sinne genommen sind, gehen durch eine unendlich ferne Gerade ϱ, sind parallel; die Stellung ϱ dieser Ebenen enthält die Richtungen r_x, r_y, r_z gemeinsam; ebenso haben die Ebenen $(-A, A, A)$ eine gemeinsame Stellung ϱ_x, welche die Richtungen

Punkte $(a, -a, a)$ in der Durchschnittslinie μ_y der Ebenen $H_{x'}$, H_y, $H_{z'}$; und die Punkte $(a, a, -a)$ in der Schnittgeraden μ_z der Halbirungsebenen $H_{x'}$, $H_{y'}$, H_z.

Diese 4 durch den Anfangspunkt gehenden Geraden μ, μ_x, μ_y und μ_z nennen wir die **Halbirungsgeraden** des Projectionssystems; sie sind die Träger von 4 Punktreihen, welche von den Punkten mit gleichen Abständen von den drei Projectionsebenen gebildet werden.

Die 8 Punkte a, b, c, d, e, f, g und h (Fig. 6a, Taf. I) von den Coordinaten $x = \pm a$, $y = \pm a$, $z = \pm a$ in allen 8 möglichen Zeichencombinationen, welche daher von allen drei Projectionsebenen gleiche Abstände haben, bilden die Eckpunkte eines regulären Hexaeders, dessen Seitenebenen zu den Ebenen, und dessen Kanten zu den Axen des Projectionssystems parallel sind. Die durch die Axen gehenden Verbindungsebenen je zweier gegenüberliegender Kanten (Diagonalebenen) des Hexaeders sind die 6 Halbirungsebenen und die durch den Anfangspunkt gehenden, zwei gegenüberliegende Ecken des Hexaeders verbindende Geraden sind die 4 Halbirungsgeraden des Projectionssystems.

r_x, $r_{y'}$, $r_{z'}$ enthält; die Stellung ϱ_y der parallelen Ebenen $(A, -A, A)$ enthält die Richtungen $r_{x'}$, r_y, $r_{z'}$, und die Stellung ϱ_z der Ebenen $(A, A, -A)$ die Richtungen $r_{x'}$, $r_{y'}$, r_z.

Diese 4 unendlich fernen Geraden ϱ, ϱ_x, ϱ_y und ϱ_z nennen wir die **Stellungen gleicher Neigung** des Projectionssystems; sie sind die Axen von 4 Parallelebenenbüscheln, welche von den Ebenen mit gleicher Neigung gegen die Projectionsebenen gebildet werden.

Die 8 Ebenen A, B, C, D, E, F, G und H (Fig. 6b, Taf. I) von den Coordinaten $X = \pm A$, $Y = \pm A$, $Z = \pm A$, in allen 8 möglichen Zeichencombinationen, welche daher gegen alle drei Projectionsebenen gleich geneigt sind, bilden die Seitenebenen eines regulären Octaeders, dessen Eckpunkte in den Axen, und dessen Kanten in den Ebenen des Projectionssystems liegen. Die in den Projectionsebenen liegenden, je zwei gegenüberliegenden parallelen Kanten des Octaeders angehörigen Richtungen sind die 6 Richtungen, und die zwei gegenüberliegenden parallelen Seitenebenen des Octaeders angehörenden Stellungen sind die 4 Stellungen gleicher Neigung im Projectionssystem.

Die Ebene H_x verbindet die zur Axe OX parallelen Kantenpaare ab und gh, $H_{x'}$, cd und fe; die Halbirungsebenen H_y und $H_{y'}$ gehen durch die zur Y-Axe parallelen Kanten ad und fg, beziehungsweise bc und eh, während die durch die Z-Axe gehenden Ebenen H_z und $H_{z'}$ die zu dieser Axe parallelen Kantenpaare ae und cg, beziehungsweise bf und dh verbinden.

Die Richtung r_x ist der in der Ebene YOZ liegende unendlich ferne Schnittpunkt der parallelen Kantenpaare $A.B$ und $G.H$, und $r_{x'}$ von $C.D$ und $F.E$; die Richtungen r_y und $r_{y'}$ liegen in der Ebene XOZ und gehören den Kantenpaaren $A.D$ und $F.G$, bezüglich $B.C$ und $E.H$ an, während die in der Horizontalebene liegenden Richtungen r_z und $r_{z'}$ den Kanten $A.E$ und $C.G$, respective $B.F$ und $D.H$ angehören.

Ebenso verbindet die Halbirungsgerade μ die Eckpunkte a und g, während μ_x, μ_y, und μ_z mit den Diagonalen bh, df und ce zusammenfallen.

Ebenso ist die Stellung ϱ durch die Parallelebenen A und G bestimmt, während die Stellungen ϱ_x, ϱ_y und ϱ_z den Parallelebenen B und H, D und F, C und E angehören.

Aus dieser Darstellung ersieht man, dass die Richtungen r_x, $r_{x'}$ ... die Richtungen der Perpendikel auf die gleichbezeichneten Halbirungsebenen ergeben, während die Stellungen ϱ, ϱ_x ... den auf den Halbirungsgeraden μ, μ_x ... senkrechten Ebenen angehören.

Die Horizontal- und Verticalprojection eines in den Ebenen H_x oder $H_{x'}$ liegenden Punktes haben von der Axe OX gleiche Abstände, werden also nach der Vereinigung der Projectionsebenen entweder zur ersten Axe der Zeichnungsebene symmetrisch liegen (H_x), oder in einen Punkt zusammenfallen ($H_{x'}$). Die Kreuzrissprojection eines solchen Punktes hat von den Axen OY und OZ gleichen Abstand, liegt also in

Die Horizontal- und Verticalspur einer durch die Richtungen r_x oder $r_{x'}$ gehenden Ebene schliessen mit der Axe OX gleiche Winkel ein, werden also nach der Vereinigung der Projectionsebenen entweder zur ersten Axe der Zeichnungsebene symmetrisch liegen (r_x), oder in eine Gerade zusammenfallen ($r_{x'}$). Die Kreuzrissspur einer solchen Ebene schneidet die Axen OY und OZ in gleichen Abständen vom Anfangs-

einer der beiden, den Axenwinkel halbirenden und durch den Axenschnittpunkt gehenden Geraden. Diese beiden Geraden nennen wir die Halbirungsgeraden der Zeichnungsebene, und bezeichnen sie mit $\mathfrak{h}$ und $\mathfrak{h}_1$.

punkte, schliesst also mit den beiden Axen der Zeichnungsebene gleiche Winkel ein. Die beiden Richtungen dieser gegen die Axen gleich geneigten Geraden nennen wir die Richtungen gleicher Neigung der Zeichnungsebene und bezeichnen sie mit $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{r}_1$.

Ebenso liegen Vertical- und Kreuzrissprojection eines Punktes der Ebenen H_z oder $H_{z'}$ entweder symmetrisch zur zweiten Axe der Zeichnungsebene (H_z), oder sie fallen zusammen ($H_{z'}$), während die Horizontalprojection in einer der Halbirungsgeraden der Zeichnungsebene liegt.

Ebenso liegen die Vertical- und Kreuzrissspur einer durch die Richtungen r_z oder $r_{z'}$ gehenden Ebene entweder symmetrisch zur zweiten Axe der Zeichnungsebene (r_z), oder sie fallen zusammen ($r_{z'}$), während die Horizontalspur durch eine der Richtungen gleicher Neigung der Zeichnungsebene geht.

Da die Axe OY nach der Vereinigung der Projectionsebenen doppelt, in der ersten und zweiten Axe der Zeichnungsebene erscheint, so finden die angegebenen Lagenverhältnisse

bei den Horizontal- und Verticalprojectionen von Punkten der Ebenen H_y und $H_{y'}$ nicht mehr statt, sondern es liegen diese Projectionen in gleichen Abständen von der zweiten, beziehungsweise ersten Axe der Zeichnungsebene. Die Verticalprojectionen liegen aber auch in diesem Falle in den Halbirungsgeraden der Zeichnungsebene.

bei den Horizontal- und Verticalspuren von Ebenen, die durch die Richtungen r_y und $r_{y'}$ gehen, nicht mehr statt, sondern es schliessen diese Spuren gleiche Winkel mit der zweiten, beziehungsweise ersten Axe der Zeichnungsebene ein. Die Verticalspuren gehen aber auch in diesem Falle durch die Richtungen gleicher Neigung der Zeichnungsebene.

Die Projectionen von Punkten der 4 Punktreihen μ, μ_x, μ_y, μ_z haben von beiden Axen der Zeichnungsebene, wegen der gleich grossen Coordina-

Die Spuren von Ebenen der 4 Ebenenbüschel ϱ, ϱ_x, ϱ_y, ϱ_z sind gegen die beiden Axen der Zeichnungsebene, wegen der gleich grossen Coordinaten-

tenwerthe, gleiche Abstände, sie liegen daher alle in den Halbirungsgeraden der Zeichnungsebene, und zwar in gleichen Abständen vom Anfangspunkte. Berücksichtigt man die Vereinigung der Projectionsebenen, so findet man im Besondern, dass die Horizontal- und Kreuzrissprojection eines Punktes der Punktreihe μ in derselben Halbirungsgeraden $\mathfrak{h}$ auf verschiedenen Seiten vom Anfangspunkte liegen, während die Verticalprojection in der zweiten Halbirungsgeraden $\mathfrak{h}_1$ liegt. Bei einem Punkte der Punktreihe μ_x fallen die Vertical- und Kreuzriss-, bei einem Punkte der Reihe μ_z die Horizontal- und Verticalprojection in einen Punkt der Halbirungsgeraden $\mathfrak{h}$ zusammen, während bei einem Punkte der Punktreihe μ_y alle drei Projectionen in einen Punkt der Geraden $\mathfrak{h}_1$ zusammenfallen. — Fig. 7a, Taf. II, zeigt die Darstellung eines Punktes des ebenen Systems $H_{z'}$, und Fig. 8a, Taf. II, die eines solchen der Punktreihe μ_x als Beispiel.

§. 13. Eine Gerade in der einen Projectionsebene, als Projection irgend einer Raumgeraden, bestimmt die letztere nur so weit, als sie dem ebenen System angehören muss,

werthe, gleich geneigt, sie gehen daher alle durch die Richtungen gleicher Neigung der Zeichnungsebene, und zwar in gleichen Abständen vom Anfangspunkte. Berücksichtigt man die Vereinigung der Projectionsebenen, so findet man im Besondern, dass die Horizontal- und Kreuzrissspur einer Ebene des Ebenenbüschels ϱ dieselbe Richtung $\mathfrak{r}$ haben und auf verschiedenen Seiten vom Anfangspunkte liegen, während die Verticalspur durch die zweite Richtung gleicher Neigung $\mathfrak{r}_1$ geht. Bei einer Ebene des Ebenenbüschels ϱ_x fallen die Vertical- und Kreuzriss-, bei einer Ebene des Büschels ϱ_z die Horizontal- und Verticalspur in einer durch die Richtung $\mathfrak{r}$ gehenden Geraden zusammen, während bei einer Ebene des Ebenenbüschels ϱ_y alle drei Spuren in eine durch die Richtung $\mathfrak{r}_1$ gehende Gerade zusammenfallen. — Fig. 7b, Taf. II, zeigt die Darstellung einer Ebene des Strahlenbündels $r_{z'}$, und Fig. 8b, Taf. II, die einer solchen des Ebenenbüschels ϱ_x als Beispiel.

Ein Punkt in der einen Projectionsebene, als Spur irgend einer Raumgeraden, bestimmt die letztere nur so weit, als sie dem Strahlenbündel angehören muss, dessen Mittelpunkt

dessen Träger die durch die angenommene Gerade gelegte Normalebene zur Projectionsebene (projicirende Ebene) ist. Zur vollständigen Bestimmung der Geraden muss also noch eine zweite Projection, und mithin auch die durch die Raumgerade zu einer zweiten Projectionsebene geführte Normalebene gegeben sein. In der Schnittlinie dieser beiden Normalebenen, als der beiden ebenen Systemen angehörigen Geraden, ist die Lage der Raumgeraden unzweifelhaft bestimmt. Legt man durch diese Schnittlinie eine Normalebene zur dritten Projectionsebene, so bestimmt dieselbe die dritte Projection der Geraden. Zwei Projectionen einer Geraden können also stets willkürlich angenommen werden; durch dieselben ist aber die Gerade im Raume und daher auch die noch fehlende Projection bestimmt. Die Projectionen irgend eines Punktes der Geraden liegen in den Projectionen der Geraden.

Um aus zwei gegebenen oder willkürlich angenommenen Projectionen einer Geraden die dritte zugehörige Projection derselben zu finden, nimmt man in den gegebenen Projectionen der Geraden die zusammengehörigen Projectionen zweier Punkte an; bestimmt man dann

der angenommene Punkt in der Projectionsebene ist. Zur vollständigen Bestimmung der Geraden muss also noch eine zweite Spur der Geraden, der Punkt, den sie mit einer zweiten Projectionsebene gemeinsam hat, gegeben sein. In der Verbindungslinie dieser beiden Spuren, als der beiden Strahlenbündeln angehörigen Geraden, ist die Lage der Raumgeraden unzweifelhaft bestimmt. Sucht man den Schnittpunkt dieser Verbindungsgeraden mit der dritten Projectionsebene, so bestimmt derselbe die dritte Spur der Geraden. Zwei Spuren einer Geraden können also stets willkürlich angenommen werden; durch dieselben ist aber die Gerade im Raume und daher auch die noch fehlende Spur bestimmt. Die Spuren irgend einer durch die Gerade gelegten Ebene gehen durch die Spuren der Geraden.

Um aus zwei gegebenen oder willkürlich angenommenen Spuren einer Geraden die dritte zugehörige Spur derselben zu finden, legt man durch die gegebenen Spuren der Geraden die zusammengehörigen Spuren zweier durch die Gerade gehenden Ebenen; bestimmt man dann

die zugehörigen dritten Projectionen dieser beiden Punkte, so ist die Verbindungsgerade derselben die gesuchte dritte Projection der Geraden.

Bei der praktischen Durchführung dieser Construction ist es am günstigsten, die Durchschnittspunkte der Geraden mit den Halbirungsebenen $H_{x'}$ und $H_{z'}$ zu wählen, da bei allen Punkten dieser Ebenen je zwei Projectionen zusammenfallen, während die dritte in der Halbirungsgeraden $\mathfrak{h}_1$ der Zeichnungsebene liegt. Sind z. B. (Fig. 9a, Taf. II) α' und α'' die Horizontal- und Verticalprojection einer Geraden α, und soll die Kreuzrissprojection α''' derselben gefunden werden, so nimmt man in α' und α'' die Horizontal- und Verticalprojectionen der oben erwähnten Schnittpunkte an, und sucht die Kreuzrissprojectionen derselben.

Die Horizontal- und Verticalprojection a' und a'' des Schnittpunktes der Geraden mit der Ebene $H_{x'}$ fallen zusammen, sie liegen also in dem Schnittpunkte der beiden Projectionen α' und α'' der gegebenen Geraden; die dritte Projection a''' dieses Punktes liegt in der Senkrechten von a'' zur zweiten Axe der Zeichnungsebene, in der Halbirungsgera-

die zugehörigen dritten Spuren dieser beiden Ebenen, so ist der Durchschnittspunkt derselben die gesuchte dritte Spur der Geraden.

Bei der praktischen Durchführung dieser Construction ist es am günstigsten, die durch die Gerade und die Richtungen gleicher Neigung $r_{x'}$ und $r_{z'}$ gelegten Ebenen zu wählen, da bei allen durch diese Richtungen gehenden Ebenen je zwei Spuren zusammenfallen, während die dritte durch die Richtung gleicher Neigung $\mathfrak{r}_1$ in der Zeichnungsebene geht. Sind z. B. (Fig. 9b, Taf. II) α_1 und α_2 die Horizontal- und Verticalspur einer Geraden α, und soll die Kreuzrissspur α_3 derselben gefunden werden, so zieht man durch α_1 und α_2 die Horizontal- und Verticalspuren der oben erwähnten Ebenen, und sucht die Kreuzrissspuren derselben.

Die Horizontal- und Verticalspur A_1 und A_2 der durch die gegebene Gerade und die Richtung $r_{x'}$ gelegten Ebene fallen zusammen, sie bilden also die Verbindungsgerade der beiden Spuren α_1 und α_2 der gegebenen Geraden; die dritte Spur A_3 dieser Ebene schneidet die zweite Axe der Zeichnungsebene mit A_2 in demselben Punkte, und geht durch die

den $\mathfrak{h}_1$ derselben. Der Durchschnittspunkt b der Geraden mit der Ebene $H_{s'}$ hat seine Horizontalprojection b' in derselben Halbirungsgeraden, während seine Verticalprojection b'' mit der Kreuzrissprojection b''' zusammenfällt. Die Verbindungsgerade der Punkte a''' und b''' gibt die gesuchte Kreuzrissprojection α''' der angenommenen Geraden. Auf ganz analoge Weise bestimmt man die Horizontal- oder Verticalprojection einer Geraden, wenn die beiden andern Projectionen gegeben sind.

Richtung $\mathfrak{r}_1$ in derselben. Die durch die Gerade und die Richtung $r_{s'}$ gelegte Ebene B hat ihre Horizontalspur B_1 parallel zu A_3, während ihre Verticalspur B_2 mit der Kreuzrissspur B_3 zusammenfällt. Der Schnittpunkt der Geraden A_3 und B_3 gibt die gesuchte Kreurissspur α_3 der angenommenen Geraden. Auf ganz analoge Weise bestimmt man die Horizontal- oder Verticalspur einer Geraden, wenn die beiden andern Spuren gegeben sind.

Mit Hülfe dieser Constructionen sind wir nun auch im Stande die früher erwähnten Aufgaben:

Zu zwei gegebenen Projectionen eines unendlich fernen Punktes a soll die dritte Projection desselben gefunden werden, aufzulösen. Man legt durch den Punkt a eine beliebige Gerade α, von welcher zwei Projectionen durch die gegebenen Richtungen, die Projectionen des Punktes, gehen müssen; bestimmt man die dritte Projection dieser Geraden, so ist der unendlich ferne Punkt, die Richtung derselben, die gesuchte dritte Projection des gegebenen Punktes. (Fig. 10a, Taf. II.)

Zu zwei gegebenen Spuren einer durch den Anfangspunkt gehenden Ebene A soll die dritte Spur derselben gefunden werden, aufzulösen. Man zieht in der Ebene A eine beliebige Gerade α, von welcher zwei Spuren in den gegebenen Spuren der Ebene liegen müssen; bestimmt man die dritte Spur dieser Geraden, so ist die Verbindungsgerade derselben mit dem Schnittpunkte der Axen die gesuchte dritte Spur der gegebenen Ebene. (Fig. 10b, Taf. II.)

Wie die Gerade in der geometrischen Raumanschauung eine doppelte Betrachtungsweise zulässt, und zwar als Träger der Punktreihe und als Axe des Ebenenbüschels, so ist auch entsprechend ihre Darstellungsart eine doppelte, durch Pro-

jection und Spur. Die Projectionen einer Geraden sind nichts anderes, als der Inbegriff der Projectionen aller Punkte, deren Träger die Gerade ist; sowie die Spuren derselben den Spuren aller Ebenen des Ebenenbüschels angehören, dessen Axe die Gerade ist. Aus der einen Darstellungsart der Geraden lässt sich die andere leicht entwickeln, so dass, wenn die Projectionen der Geraden gegeben sind, leicht die Spuren, und umgekehrt aus den gegebenen Spuren die Projectionen bestimmt werden können.

Sind die drei Projectionen α', α'' und α''' (Fig. 11a, Taf. II) einer Geraden, von welchen zwei willkürlich angenommen werden können, die dritte aber bestimmt werden muss, gegeben, so findet man die Spuren dieser Geraden durch Bestimmung der Spuren der durch die Geraden gelegten drei projicirenden Ebenen. Die Horizontalprojection α' der Geraden ist die Schnittlinie der durch die Gerade zur Horizontalebene normal gelegten Ebene H mit dieser Projectionsebene, mithin die Horizontalspur H_1 dieser Ebene; die Vertical- und Kreuzrissspur H_2, H_3 derselben findet man leicht, da sie, nach dem Frühern, durch die Schnittpunkte der Horizontalspur mit den Axen OX und OY gehen, und zu diesen Axen senkrecht sein müssen. Ebenso ist α'' die Verticalspur V_2 der zur Verticalebene normalen, projicirenden Ebene V der Geraden, aus welcher die Horizontal- und Kreuzrissspur V_1

Sind die drei Spuren α_1, α_2 und α_3 (Fig. 11b, Taf. II) einer Geraden, von welchen zwei willkürlich angenommen werden können, die dritte aber bestimmt werden muss, gegeben, so findet man die Projectionen dieser Geraden durch Bestimmung der Projectionen der drei Schnittpunkte der Geraden mit den Projectionsebenen. Die Horizontalspur α_1 der Geraden ist der Schnittpunkt h derselben mit der Horizontalebene, mithin auch die Horizontalprojection h' dieses Punktes; die Vertical- und Kreuzrissprojection h'', h''' desselben findet man leicht, da sie, nach dem Frühern, in den von der Horizontalprojection zu den Axen OX und OY gefällten Senkrechten, in diesen Axen liegen müssen. Ebenso ist α_2 die Verticalprojection v'' des in der Verticalebene liegenden Punktes v der Geraden, aus welcher die Horizontal- und Kreuzrissprojection v', v''' gefunden werden können. Aus

und V_3 gefunden werden können. Aus der Kreuzrissprojection α''' der Geraden ergeben sich in gleicher Weise die drei Spuren K_1, K_2, K_3 der zur Kreuzrissebene projicirenden Ebene K der Geraden. Wir erhalten so die Spuren von drei durch die Gerade gelegten Ebenen H, V, K, und die gemeinsamen Schnittpunkte der gleichbezeichneten Spuren dieser drei Ebenen geben die entsprechenden Spuren der Geraden.

Da schon durch die Spuren zweier von diesen drei Ebenen H, V, K, welche durch zwei gegebene Projectionen der Geraden bestimmt sind, sich die Spuren der Geraden α als Schnittpunkte zweier Geraden ergeben, und aus den Spuren umgekehrt die noch fehlende dritte Projection der Raumgeraden gefunden werden kann; so kann dieses Verfahren auch statt des früher gegebenen benützt werden, um aus zwei gegebenen Projectionen einer Geraden die dritte zu finden.

der Kreuzrissspur α_3 der Geraden ergeben sich in gleicher Weise die drei Projectionen k', k'', k''' des in der Kreuzrissebene liegenden Punktes k der Geraden. Wir erhalten so die Projectionen von drei in der Geraden liegenden Punkten h, v, k, und die gemeinsamen Verbindungsgeraden der gleichbezeichneten Projectionen dieser drei Punkte geben die entsprechenden Projectionen der Geraden.

Da schon durch die Projectionen zweier von diesen drei Punkten h, v, k, welche durch zwei gegebene Spuren der Geraden bestimmt sind, sich die Projectionen der Geraden α als die Verbindungslinien zweier Punkte ergeben, und aus den Projectionen umgekehrt die noch fehlende dritte Spur der Raumgeraden gefunden werden kann; so kann dieses Verfahren auch statt des früher gegebenen benützt werden, um aus zwei gegebenen Spuren einer Geraden die dritte zu finden.

Diese Bestimmungsweisen werden sich besonders dann mit Vortheil anwenden lassen, wenn sowohl die Projectionen, als auch die Spuren einer Geraden gebraucht werden.

§. 14. Eine Gerade im Raume ist entweder zu keiner, zu einer oder zu zwei Projectionsebenen parallel.

Ist die Gerade zu allen drei

Eine Gerade im Raume geht entweder durch keine, durch eine oder durch zwei Projectionsaxen.

Schneidet die Gerade keine

Projectionsebenen geneigt, so sind auch alle drei Projectionen derselben gegen die Axen der Zeichnungsebene geneigt.

Ist die Gerade zu einer Projectionsebene parallel, so fallen die zu den beiden andern Projectionsebenen projicirenden Ebenen der Geraden in eine einzige, zur zwischenliegenden Axe senkrechte Ebene zusammen. Die Gerade ist also durch ihre beiden Projectionen auf diese Ebenen nicht bestimmt.

Liegt die Gerade parallel zur Horizontalebene, so fallen ihre Vertical- und Kreuzrissprojection in dieselbe, zur zweiten Axe der Zeichnungsebene senkrechte Gerade; ist sie parallel zur Kreuzrissebene, so sind Horizontal- und Verticalprojection in derselben Senkrechten zur ersten Axe vereinigt. Ist die Gerade hingegen zur Verticalebene parallel, so fallen Horizontal- und Kreuzrissprojection nicht mehr zusammen, sondern sie erscheinen, wegen der doppelten Drehung der Y-Axe, als zwei in gleichen und gleichbezeichneten Abständen zu der ersten und zweiten Axe der Zeichnungsebene gezogene Parallele. Von den Spuren einer solchen Geraden ist eine immer ein unendlich ferner Punkt, die Richtung der entsprechenden Projection der Geraden der drei Projectionsaxen, so liegt auch keine der drei Spuren derselben in einer der Axen der Zeichnungsebene.

Schneidet die Gerade eine der Projectionsaxen, so fallen die Spuren der Geraden in den diese Axe einschliessenden Projectionsebenen in einem Punkte dieser Axe zusammen. Die Gerade ist also durch ihre beiden Spuren in diesen Ebenen nicht bestimmt.

Schneidet die Gerade die Axe OZ, so fallen ihre Vertical- und Kreuzrissspur in denselben Punkt der zweiten Axe der Zeichnungsebene; schneidet sie die Axe OX, so sind Horizontal- und Verticalspur in demselben Punkte der ersten Axe vereinigt. Geht die Gerade hingegen durch einen Punkt der Axe OY, so fallen Horizontal- und Kreuzrissspur nicht mehr zusammen, sondern sie erscheinen, wegen der doppelten Drehung der Y-Axe, als zwei in gleichen und gleichbezeichneten Abständen vom Anfangspunkt gelegene Punkte der ersten und zweiten Axe der Zeichnungsebene. Von den Projectionen einer solchen Geraden geht eine immer durch den Schnittpunkt der Axen, während die beiden andern sich in einem Punkte der zwischen-

raden, während die beiden andern in einer Senkrechten zur zwischenliegenden Axe liegen. Fig. 12a (Taf. II) gibt die Darstellung einer solchen zur Horizontalebene parallelen Geraden.

Ist die Gerade zu zwei Projectionsebenen, d. i. zu einer Axe, parallel, so ist sie auf der dritten senkrecht; ihre Projection auf diese Ebene ist, da alle Perpendikel ihrer Punkte mit der Geraden zusammenfallen, ein Punkt; ihre beiden andern Projectionen stehen auf den in dieser Projectionsebene liegenden Axen senkrecht. Von den Spuren einer solchen Geraden liegen zwei im unendlich fernen Punkt der zur Geraden parallelen Axe; die dritte fällt mit der als Punkt erscheinenden Projection der Geraden zusammen. Fig. 13a (Taf. III) zeigt die Darstellung einer solchen zur Horizontalebene senkrechten Geraden.

Liegt die Gerade α in unendlicher Entfernung, ist sie eine bestimmte Stellung, so fallen ihre drei Projectionen in der unendlich fernen Geraden der Zeichnungsebene zusammen. Ihre drei Spuren sind drei unendlich ferne Punkte (Richtungen), von welchen zwei willkürlich angenommen werden können. Zur Bestimmung der dritten Spur legt man durch

liegenden Axe schneiden. Fig. 12b (Taf. II) gibt die Darstellung einer solchen, durch die Axe OZ gehenden Geraden.

Schneidet die Gerade zwei Projectionsaxen, so liegt sie in der durch dieselben gehenden Projectionsebene; ihre Spur in dieser Ebene ist, da alle ihre Punkte in derselben liegen, die Gerade selbst; ihre beiden andern Spuren liegen in den in dieser Projectionsebene befindlichen Axen. Von den Projectionen einer solchen Geraden fallen zwei mit den Axen der Projectionsebene, in welcher die Gerade liegt, zusammen; die dritte ist die Gerade selbst, welche hier auch zugleich als ihre Spur in dieser Ebene erscheint. Fig. 13b (Taf. III) zeigt die Darstellung einer solchen in der Horizontalebene liegenden Geraden.

Geht die Gerade α durch den Anfangspunkt des Projectionssystems, so fallen ihre drei Spuren in dem Schnittpunkte der Axen zusammen. Ihre drei Projectionen sind drei durch den Axenschnittpunkt gehende Gerade, von welchen zwei willkürlich angenommen werden können. Zur Bestimmung der dritten Projection nimmt man in dieser Geraden einen Punkt

diese unendlich ferne Gerade eine Ebene A, von welcher zwei Spuren durch die angenommenen Richtungen, Spuren der Geraden, gehen müssen; bestimmt man nun die dritte Spur dieser Ebene auf bekannte Weise, so ist der unendlich ferne Punkt, die Richtung, derselben die gesuchte dritte Spur der Geraden (Fig. 14 a, Taf. III).

§. 15. Ist eine Gerade als Träger einer Punktreihe gegeben, so liegen die Projectionen aller Punkte der Reihe in den Projectionen dieser Geraden, und bilden so drei Punktreihen in der Zeichnungsebene, deren Träger die Projectionen der Geraden sind.

Diese drei Punktreihen sind so auf einander bezogen, dass jedem Punkte der ersten Reihe, als der Horizontalprojection eines Punktes der Reihe im Raume, je ein Punkt der zweiten und dritten Reihe, die zugehörige Vertical- und Kreuzrissprojection des Punktes entsprechen.

Je zwei sich entsprechende Punkte der ersten und zweiten, sowie der zweiten und dritten Reihe liegen in einer Senkrechten zu den Axen der Zeichnungsebene, und die gemeinsamen Schnittpunkte dieser Reihen sind, als die zusammenfallenden Projectionen der Schnittpunkte

a an, von welchem zwei Projectionen in den angenommenen Projectionen der Geraden liegen müssen; bestimmt man nun die dritte Projection dieses Punktes auf bekannte Weise, so ist die Verbindungslinie derselben mit dem Axenschnittpunkte die gesuchte dritte Projection der Geraden (Fig. 14 b, Taf. III).

Ist eine Gerade als Axe eines Ebenenbüschels gegeben, so gehen die Spuren aller Ebenen dieses Büschels durch die Spuren dieser Geraden, und bilden so drei Strahlenbüschel in der Zeichnungsebene, deren Mittelpunkte die Spuren der Geraden sind.

Diese drei Strahlenbüschel sind so auf einander bezogen, dass jedem Strahle des ersten Büschels, als der Horizontalspur einer Ebene des Ebenenbüschels, je ein Strahl des zweiten und dritten Büschels, die zugehörige Vertical- und Kreuzrissspur der Ebene entsprechen.

Je zwei sich entsprechende Strahlen des ersten und zweiten, sowie des zweiten und dritten Büschels schneiden sich in den Axen der Zeichnungsebene, und die gemeinsamen Strahlen dieser Büschel sind, als die zusammenfallenden Spuren der durch die Gerade und die Rich-

der Geraden mit den Ebenen $H_{x'}$ und $H_{z'}$, einander entsprechende Punkte.

Zwei so auf einander bezogene Punktreihen nennt man projectivisch (π), und in der speciellen Lage, dass die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte sich in einem Punkte schneiden, perspectivisch gelegen.

Ist die Gerade zur Ebene YOZ oder XOY parallel, so fallen die Träger der ersten und zweiten, beziehungsweise der zweiten und dritten Punktreihe in derselben Geraden zusammen, die beiden projectivischen Punktreihen sind in einem Träger vereinigt. Von den entsprechenden Punkten dieser in demselben Träger vereinigten Punktreihen, welche mit Hülfe der dritten Projection der Geraden leicht bestimmt werden können, fallen zwei Paare zusammen, nämlich die Projectionen des Schnittpunktes der Geraden mit der Halbirungsebene $H_{x'}$, beziehungsweise $H_{z'}$, und die unendlich fernen Punkte beider Reihen, als die Projectionen des unendlich fernen Punktes der Punktreihe im Raume. (Fig. 15a, Taf. III.)

Liegt die Gerade in unendlicher Entfernung, so sind die Projectionen ihrer Punkte be-

tungen $r_{x'}$ und $r_{z'}$ gelegten Ebenen, einander entsprechende Strahlen.

Zwei so auf einander bezogene Strahlenbüschel nennt man projectivisch (π), und in der speciellen Lage, dass die Schnittpunkte entsprechender Strahlen in einer Geraden liegen, perspectivisch gelegen.

Schneidet die Gerade die Axe OX oder OZ, so fallen die Mittelpunkte des ersten und zweiten, beziehungsweise des zweiten und dritten Strahlenbüschels in demselben Punkte zusammen, die beiden projectivischen Strahlenbüschel sind concentrisch. Von den entsprechenden Strahlen dieser beiden concentrischen Strahlenbüschel, welche mit Hülfe der dritten Spur der Geraden leicht bestimmt werden können, fallen zwei Paare zusammen, nämlich die Spuren der durch die Gerade und die Richtung $r_{x'}$, beziehungsweise $r_{z'}$, gelegten Ebene, und die durch den gemeinsamen Mittelpunkt gehende Axe, als die zusammenfallenden Spuren der durch den Anfangspunkt gehenden Ebene des Ebenenbüschels. (Fig. 15b, Taf. III.)

Geht die Gerade durch den Anfangspunkt, so gehen die Spuren aller durch sie gelegten

stimmte Richtungen in der Zeichnungsebene, und die unendlich ferne Gerade der Zeichnungsebene ist der gemeinsame Träger der drei projectivischen Punktreihen. Die Gerade selbst, der Träger der Punktreihe, kann nur durch ihre Spuren, drei unendlich ferne Punkte (Richtungen) bestimmt werden.

Um zu einer angenommenen Projection (Richtung) eines Punktes a dieser unendlich fernen Punktreihe die zugehörigen andern Projectionen zu finden, legt man durch die gegebene Gerade α eine Ebene A (deren Spuren durch die Spuren der Geraden gehen müssen) und zieht in derselben eine Gerade β, deren eine Projection durch die angenommene Richtung, Projection des Punktes, geht. Bestimmt man die beiden andern Projectionen der Geraden β so, dass dieselbe in der angenommenen Ebene A liegt, so sind die Richtungen, die unendlich fernen Punkte, dieser Projectionen die gesuchten Projectionen. (Fig. 16a, Taf. III.)

Liegt die Gerade in der Ebene $H_{x'}$ oder $H_{z'}$, so fallen ihre Horizontal- und Vertical-, beziehungsweise Vertical- und Kreuzrissprojection zusammen; in diesen zwei so vereinigten Punktreihen fallen aber auch alle entsprechenden Punkte zu-

Ebenen, durch den Axenschnittpunkt, und dieser Punkt ist auch der gemeinsame Mittelpunkt der drei projectivischen Strahlenbüschel. Die Gerade selbst, die Axe des Ebenenbüschels, kann nur durch ihre Projectionen, drei durch den Schnittpunkt der Axen gehende Gerade, bestimmt werden.

Um zu einer angenommenen Spur einer Ebene A dieses durch die Gerade gehenden Ebenenbüschels die zugehörigen andern Spuren zu finden, nimmt man in der gegebenen Geraden α einen Punkt a an (dessen Projectionen in den Projectionen der Geraden liegen müssen) und legt durch denselben eine Gerade β, deren eine Spur in der angenommenen Spur der Ebene liegt. Bestimmt man die beiden andern Spuren der Geraden β so, dass dieselbe durch den angenommenen Punkt a geht, so sind die Verbindungslinien dieser Spuren mit dem Schnittpunkt der Axen die gesuchten Spuren. (Fig. 16b, Taf. III.)

Geht die Gerade durch die Richtungen $r_{x'}$ oder $r_{z'}$, so fallen ihre Horizontal- und Vertical-, beziehungsweise Vertical- und Kreuzrissspur zusammen; in diesen zwei concentrischen Strahlenbüscheln fallen aber auch alle entsprechenden Strah-

sammen. Der Träger der dritten Punktreihe, die dritte Projection der Geraden, ist die Halbirungsgerade $\mathfrak{h}_1$.

len zusammen. Der Mittelpunkt des dritten Strahlenbüschels, die dritte Spur der Geraden, ist die Richtung $\mathfrak{r}_1$.

§. 16. Der Strahlenbüschel, der durch seinen Mittelpunkt und seinen Träger gegeben ist, erscheint als Element, sowohl des durch seinen Mittelpunkt gehenden Strahlenbündels, als auch des in seinem Träger liegenden ebenen Systems; er lässt daher eine doppelte Darstellungsweise zu: durch die Projectionen und die Spuren seiner Geraden. Die Projectionen aller Geraden eines Strahlenbüschels gehen durch die entsprechenden Projectionen des Mittelpunktes und bilden drei projectivische Strahlenbüschel; die Spuren der Geraden des Büschels liegen in den entsprechenden Spuren seines Trägers und bilden drei projectivische Punktreihen in der Zeichnungsebene. Die weitern Beziehungen zwischen diesen Darstellungsarten können aber erst bei Betrachtung der Darstellung des Strahlenbündels und des ebenen Systems gegeben werden.

§. 17. Ist eine Ebene im Raume, als Träger eines ebenen Systems durch ihre Spuren gegeben, so liegen die Spuren jeder Geraden dieses ebenen Systems in den Spuren der gegebenen Ebene; die Projectionen einer solchen Geraden bestimmen sich aus den angenommenen Spuren derselben. Soll ein Punkt dieses ebenen Systems dargestellt werden, so ist dies nur mit Hülfe einer Geraden möglich, die durch den darzustellenden Punkt geht. Die Spuren dieser Hülfsgeraden liegen in den Spuren der gegebenen Ebene; aus diesen Spuren lassen sich die Projectionen der Geraden bestimmen, in welchen die Projectionen

Ist ein Punkt im Raume, als Mittelpunkt eines Strahlenbündels durch seine Projectionen gegeben, so gehen die Projectionen jeder Geraden dieses Strahlenbündels durch die Projectionen des gegebenen Punktes; die Spuren einer solchen Geraden bestimmen sich aus den angenommenen Projectionen derselben. Soll eine Ebene des Strahlenbündels dargestellt werden, so ist dies nur mit Hülfe einer Geraden möglich, die in der darzustellenden Ebene liegt. Die Projectionen dieser Hülfsgeraden gehen durch die Projectionen des gegebenen Punktes; aus diesen Projectionen lassen sich die Spuren der Geraden bestimmen,

des gesuchten Punktes liegen müssen.

Sind z. B. (Fig. 17a, Taf. III) A_1, A_2, A_3 die Spuren einer Ebene und a' die Horizontalprojection eines Punktes, der in der Ebene A liegen soll, und dessen Vertical- und Kreuzrissprojection zu bestimmen sind, so zieht man in der Ebene A eine Gerade α, deren Horizontalprojection α', damit diese Gerade durch den zu bestimmenden Punkt a gehen kann, durch die Horizontalprojection a' dieses Punktes gehen muss. Die Hülfsgerade α muss nun in der Ebene A und in der durch α' gehenden, zur Horizontalebene projicirenden Ebene H liegen. Da die Ebene H zur Horizontalebene senkrecht ist, so ist die Horizontalspur H_1 derselben α' selbst, während ihre Vertical- und Kreuzrissspur H_2 und H_3 auf den Axen OX und OY senkrecht sind. Die Schnittpunkte der gleichbezeichneten Spuren der Ebenen A und H geben die Spuren dieser Hülfsgeraden, aus welchen die Projectionen α'' und α''' derselben bestimmt werden können. Die gesuchten Projectionen a'' und a''' des Punktes sind dann durch die Senkrechten von der Horizontalprojection zu den Axen und durch die gefundenen Pro- durch welche die Spuren der gesuchten Ebene gehen müssen.

Sind z. B. (Fig. 17b, Taf. III) a', a'', a''' die Projectionen eines Punktes und A_1 die Horizontalspur einer Ebene, die durch den Punkt a gehen soll, und deren Vertical- und Kreuzrissspur zu bestimmen sind, so legt man durch den Punkt a eine Gerade α, deren Horizontalspur α_1, damit diese Gerade in der zu bestimmenden Ebene A liegen kann, in der Horizontalspur A_1 dieser Ebene liegen muss. Die Hülfsgerade α muss nun durch den Punkt a und den in der Horizontalebene liegenden Punkt $h(\alpha_1)$ gehen. Da der Punkt h in der Horizontalebene liegt, so ist er seine eigene Horizontalprojection h', während seine Vertical- und Kreuzrissprojection, h'' und h''', in den Axen OX und OY liegen. Die Verbindungsgeraden der gleichbezeichneten Projectionen der Punkte a und h geben die Projectionen dieser Hülfsgeraden, aus welchen die Spuren α_2 und α_3 derselben bestimmt werden können. Die gesuchten Spuren A_2 und A_3 der Ebene sind dann durch die Schnittpunkte der Horizontalspur A_1 mit den Axen und durch die gefundenen Spuren α_2 und α_3 der Hülfsgeraden bestimmt.

jectionen α'' und α''' der Hülfsgeraden bestimmt.

Die Projectionen der Geraden und Punkte des ebenen Systems, dessen Träger die gegebene Ebene A ist, bilden in den drei Projectionsebenen drei ebene Systeme, indem jeder Geraden des Raumsystems drei Gerade, jedem Punkte desselben drei Punkte, die Projectionen der betreffenden Elemente in den drei Projectionsebenen entsprechen. Jeder Punktreihe, deren Träger eine Gerade des ebenen Systems im Raume ist, entsprechen drei in den Projectionen dieser Geraden liegende Punktreihen; jedem Strahlenbüschel, dessen Mittelpunkt ein Punkt des Raumsystems ist, entsprechen drei Strahlenbüschel, deren Mittelpunkte die Projectionen des Raumpunktes sind.

Diese drei ebenen Systeme, deren gemeinsamen Träger die Zeichnungsebene bildet, und welche wir der bessern Unterscheidung wegen als Systeme 1, 2 und 3 bezeichnen wollen, je nachdem sie von den Horizontal-, Vertical- oder Kreuzrissprojectionen der Elemente des Raumsystems gebildet werden, sind aber ebenfalls in solcher gegenseitiger Beziehung, dass jedem Punkte und jeder Geraden des einen Systems,

Die Spuren der Geraden und Ebenen des Strahlenbündels, dessen Mittelpunkt der gegebene Punkt a ist, bilden in den drei Projectionsebenen drei ebene Systeme, indem jeder Geraden des Strahlenbündels drei Punkte, jeder Ebene desselben drei Gerade, die Spuren der betreffenden Elemente in den drei Projectionsebenen entsprechen. Jedem Ebenenbüschel, dessen Axe eine Gerade des Strahlenbündels ist, entsprechen drei Strahlenbüschel, deren Mittelpunkte die drei Spuren dieser Axe sind; jedem Strahlenbüschel, dessen Ebene ein Element des Strahlenbündels ist, entsprechen drei in den Spuren dieser Ebene liegende Punktreihen.

Diese drei ebenen Systeme, deren gemeinsamen Träger die Zeichnungsebene bildet, und welche wir der bessern Unterscheidung wegen als Systeme I, II und III bezeichnen wollen, je nachdem sie von den Horizontal-, Vertical- oder Kreuzrissspuren der Elemente des Strahlenbündels gebildet werden, sind aber ebenfalls in solcher gegenseitiger Beziehung, dass jedem Punkte und jeder Geraden des einen Systems,

als Projection eines Punktes oder einer Geraden des Raumsystems, je ein bestimmter Punkt und je eine bestimmte Gerade der beiden andern Systeme, die zugehörigen Projectionen des betreffenden Elementes entsprechen. Jeder Punktreihe und jedem Strahlenbüschel des einen Systems entsprechen gleichartige Gebilde in den beiden andern Systemen, und zwar so, dass die Träger und Mittelpunkte solcher einander entsprechender Gebilde, entsprechende Gerade und Punkte der drei Systeme sind.

als Spur eines Strahls oder einer Ebene des Strahlenbündels, je ein bestimmter Punkt und je eine bestimmte Gerade der beiden andern Systeme, die zugehörigen Spuren des betreffenden Elementes entsprechen. Jeder Punktreihe und jedem Strahlenbüschel des einen Systems entsprechen gleichartige Gebilde in den beiden andern Systemen, und zwar so, dass die Träger und Mittelpunkte solcher einander entsprechender Gebilde, entsprechende Gerade und Punkte der drei Systeme sind.

Zwei oder mehrere so auf einander bezogene ebene Systeme nennt man collineare ebene Systeme.

Ein ebenes System, dessen Träger eine beliebige Raumebene ist, wird mithin dargestellt durch drei collineare Systeme in der Zeichnungsebene, deren Elemente die Projectionen der Elemente des Raumsystems sind.

Die gegenseitigen Lagenverhältnisse dieser drei collinearen Systeme ergeben sich aus der Betrachtung der gegenseitigen Lage der zusammengehörigen Projectionen von bestimmten Punkten und Geraden des Raumsystems, d. i. entsprechender Punkte und Geraden der drei Systeme.

Bei jeder zur Kreuzrissebene parallelen Geraden des Raum-

Ein Strahlenbündel, dessen Mittelpunkt ein beliebiger Raumpunkt ist, wird mithin dargestellt durch drei collineare Systeme in der Zeichnungsebene, deren Elemente die Spuren der Elemente des Strahlenbündels sind.

Die gegenseitigen Lagenverhältnisse dieser drei collinearen Systeme ergeben sich aus der Betrachtung der gegenseitigen Lage der zusammengehörigen Spuren von bestimmten Geraden und Ebenen des Strahlenbündels, d. i. entsprechender Punkte und Geraden der drei Systeme.

Bei jeder durch die Axe OX gehenden Geraden des

systems fällt die Horizontal- und Verticalprojection in dieselbe Senkrechte zur ersten Axe der Zeichnungsebene; dasselbe gilt für die Vertical- und Kreuzrissprojection jeder zur Horizontalebene parallelen Geraden, welche Projectionen in derselben Senkrechten zur zweiten Axe liegen. Die Systeme 1 und 2, sowie 2 und 3 haben daher einen Punkt und alle durch ihn gehenden Geraden, nämlich die Richtung der Perpendikel zur ersten, respective zweiten Axe der Zeichnungsebene entsprechend gemein. Einander entsprechende Punkte dieser Systeme müssen demnach in einer durch diese Richtung gehenden Geraden liegen.

Jeder Punkt des ebenen Systems im Raume, welcher in der Ebene $H_{x'}$ liegt, der also einer Punktreihe angehört, deren Träger die Schnittlinie des Raumsystems mit der Ebene $H_{x'}$ ist, hat seine Horizontal- und Verticalprojection in einem Punkte vereinigt. Diese Punktreihe ergibt daher in den Systemen 1 und 2 dieselbe Punktreihe, deren Träger die zusammenfallenden Projectionen x''' des Trägers der Punktreihe im Raume sind. Die beiden Systeme fallen daher auch mit zwei einander entsprechenden Geraden und allen in ihr

Strahlenbündels fällt die Horizontal- und Verticalspur in demselben Punkte der ersten Axe der Zeichnungsebene zusammen; dasselbe gilt für die Vertical- und Kreuzrissspur jeder die Axe OZ schneidenden Geraden, welche Spuren in einem Punkte der zweiten Axe zusammenfallen. Die Systeme I und II, sowie II und III haben daher eine Gerade und alle in ihr liegenden Punkte, nämlich die erste, respective zweite Axe der Zeichnungsebene entsprechend gemein. Einander entsprechende Gerade dieser Systeme müssen sich demnach in einem Punkte dieser Axe schneiden.

Jede Ebene des Strahlenbündels, welche durch die Richtung $r_{x'}$ geht, die also einem Ebenenbüschel angehört, dessen Axe der durch diese Richtung gezogene Strahl des Strahlenbündels ist, hat ihre Horizontal- und Verticalspur in einer Geraden vereinigt. Dieser Ebenenbüschel ergibt daher in den Systemen I und II denselben Strahlenbüschel, dessen Mittelpunkt die zusammenfallenden Spuren ζ_{12} der Axe des Ebenenbüschels sind. Die beiden Systeme fallen daher auch mit zwei einander entsprechenden Punkten und allen durch

liegenden Punkten auf einander. Die Schnittpunkte je zweier entsprechender Geraden beider Systeme müssen daher alle in dem Träger dieser gemeinsamen Punktreihe liegen.

dieselben gehenden Geraden auf einander. Die Verbindungsgeraden je zweier entsprechender Punkte beider Systeme müssen daher alle durch den Mittelpunkt dieses gemeinsamen Strahlenbüschels gehen.

Dasselbe gilt für die Systeme 2 und 3, welche die in den zusammenfallenden Projectionen $x''\,'''$ der Schnittlinie mit $H_{z'}$ liegende Punktreihe gemeinsam haben.

Dasselbe gilt für die Systeme II und III, welche den durch die zusammenfallenden Spuren ζ_{23} des zur Richtung $r_{z'}$ gezogenen Strahls gehenden Strahlenbüschel gemeinsam haben.

Bei den Systemen 1 und 3 finden diese Lagenbeziehungen nicht statt, da sowohl die sich entsprechenden Senkrechten zur Y-Axe, als auch die Horizontal- und Kreuzrissprojection der Schnittlinie mit der Ebene $H_{y'}$ nach der Vereinigung der Projectionsebenen in der Zeichnungsebene nicht zusammenfallen.

Bei den Systemen I und III finden diese Lagenbeziehungen nicht statt, da sowohl die sich entsprechenden Punkte der Y-Axe, als auch die Horizontal- und Kreuzrissspur des zur Richtung $r_{y'}$ gezogenen Strahls, nach der Vereinigung der Projectionsebenen in der Zeichnungsebene nicht zusammenfallen.

Die drei Projectionen der unendlich fernen Geraden des Raumsystems fallen in der unendlich fernen Geraden der Zeichnungsebene zusammen, sowie die Projectionen des Schnittpunktes mit der Halbirungsgeraden μ_y in dem Schnittpunkte der Projectionen $x'\,''$ und $x''\,'''$ zusammenfallen, da die Gerade μ_y der Schnitt der Ebenen $H_{x'}$ und $H_{z'}$ ist. Dieser Punkt und diese Gerade, in welchen entsprechende Elemente aller drei Systeme zusammenfallen, sind

Die drei Spuren des durch den Anfangspunkt gehenden Strahls fallen in dem Schnittpunkte der Axen zusammen, sowie die Spuren der durch die Stellung ϱ_y gelegten Ebene des Strahlenbündels in der Verbindungsgeraden der Spuren ζ_{12} und ζ_{23} zusammenfallen, da die Stellung ϱ_y die Richtungen $r_{x'}$ und $r_{z'}$ in sich enthält. Dieser Punkt und diese Gerade, in welchen entsprechende Elemente aller drei Systeme zusammenfallen, sind

auch die einzigen zusammenfallenden Elemente der collinearen Systeme 1 und 3.

auch die einzigen zusammenfallenden Elemente der collinearen Systeme I und III.

Sind zwei collineare Systeme so in derselben Ebene vereinigt, dass sie einen Punkt und alle durch ihn gehenden Geraden, d. i. einen Strahlenbüschel, sowie eine Gerade und alle in ihr liegenden Punkte, d. i. eine Punktreihe, gemeinsam haben, so heissen sie perspectivisch gelegen. Der Mittelpunkt des gemeinsamen Strahlenbüschels heisst das Collineationscentrum, und jede durch ihn gehende, zwei entsprechende Punkte beider Systeme verbindende Gerade ein Collineationsstrahl. Der Träger der gemeinsamen Punktreihe, in welchem die Schnittpunkte aller Paare entsprechender Geraden liegen, wird die Collineationsaxe genannt.

Nach diesen Erklärungen bilden die Projectionen der Elemente eines ebenen Systems drei collineare Systeme, welche in der Zeichnungsebene so vereinigt sind, dass die Systeme 1 und 2, sowie 2 und 3 perspectivisch gelegen erscheinen. Die Richtungen der zweiten und ersten Axe der Zeichnungsebene sind die Collineationscentren und die zusammenfallenden Projectionen $x'\,''$ und $x''\,'''$ die Collineationsaxen der perspectivisch gelegenen Systeme.

Bemerkenswerth sind noch folgende Beziehungen: Der in einer der Axen gelegene Punkt des ebenen Systems im Raume hat seine eine Projection im Schnittpunkt der Axen, während seine beiden andern Projectionen in den Schnittpunkten der entsprechenden Spuren des Trägers des Raumsystems

Nach diesen Erklärungen bilden die Spuren der Elemente eines Strahlenbündels drei collineare Systeme, welche in der Zeichnungsebene so vereinigt sind, dass die Systeme I und II, sowie II und III perspectivisch gelegen erscheinen. Die erste und zweite Axe der Zeichnungsebene sind die Collineationsaxen und die zusammenfallenden Spuren ζ_{12} und ζ_{23} die Collineationscentren der perspectivisch gelegenen Systeme.

Bemerkenswerth sind noch folgende Beziehungen: Die zu einer Projectionsebene parallele Ebene des Strahlenbündels hat ihre Spur in dieser Ebene in unendlicher Entfernung, während ihre beiden andern Spuren durch die beiden entsprechenden Projectionen des Mittelpunktes des Strahlenbündels

mit der entsprechenden Axe liegen. Diesen beiden Projectionen, als Punkten der betreffenden zwei von den das Raumsystem darstellenden ebenen Systemen, entspricht also der Schnittpunkt der Axen im dritten Systeme. Jeder durch diese Punkte gehenden Geraden entspricht eine durch den Axenschnittpunkt gehende Gerade im dritten Systeme.

gehen und zur zwischenliegenden Axe senkrecht sind. Diesen beiden Spuren, als Geraden der betreffenden zwei von den das Strahlenbündel darstellenden ebenen Systemen, entspricht also die unendlich ferne Gerade des dritten Systems. Jedem Punkte dieser Geraden entspricht ein unendlich ferner Punkt, eine Richtung, im dritten Systeme.

Jene Geraden in collinearen ebenen Systemen, welche die den unendlich fernen Punkten des andern Systems entsprechenden Punkte enthalten, nennt man die Gegenaxen der collinearen Systeme.

Da die Projectionen der unendlich fernen Geraden des Raumsystems in der unendlich fernen Geraden der Zeichnungsebene zusammenfallen, so entspricht jedem unendlich fernen Punkte in einem der drei Systeme ebenfalls ein unendlich ferner Punkt in den beiden andern. Die Gegenaxen fallen in der unendlich fernen Geraden zusammen. Dieser besondere Fall der Collineation heisst Affinität. Sind affine Systeme in derselben Ebene in perspectivischer Lage vereinigt, so ist das Collineationscentrum stets in unendlicher Entfernung, die Collineationsstrahlen sind daher parallel.

Zieht man durch die Projectionen des Mittelpunktes des Strahlenbündels die Parallelen zu den Axen der Zeichnungsebene, so erhält man die 6 Gegenaxen der Systeme I und II, II und III, sowie I und III; zugleich ersieht man, dass die Gegenaxen der perspectivisch gelegenen Systeme zu den betreffenden Collineationsaxen parallel sind.

Mit Hülfe der Collineationsaxen ist es leicht, zu einem Punkte oder Geraden des einen

Mit Hülfe der Collineationscentren ist es leicht, zu einem Punkte oder einer Geraden des

Systems die entsprechenden Elemente in den beiden andern Systemen aufzufinden, d. h. zu der einen Projection eines Punktes oder einer Geraden des Raumsystems die zugehörigen andern Projectionen zu bestimmen. Sind A_1 A_2 A_3 die Spuren des Trägers eines ebenen Systems und a' die Horizontalprojection eines Punktes desselben, (ein Punkt des Projectionssystems 1) gegeben, und sollen die entsprechenden Punkte der beiden andern Systeme gefunden werden, so handelt es sich zunächst um die Bestimmung der Collineationsaxen $\varkappa'{}''$ und $\varkappa''{}'''$. Die Collineationsaxe $\varkappa'{}''$ (Fig. 18a, Taf. III) der perspectivisch gelegenen Systeme 1 und 2 ist, wie oben bemerkt, die zusammenfallende Horizontal- und Verticalprojection der Schnittgeraden $\varkappa$ des Trägers des Raumsystems mit der Halbirungsebene $H_{x'}$. Da diese Gerade durch die Axe OX geht, so liegen ihre Horizontal- und Verticalspur $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ in demselben Punkt der ersten Axe der Zeichnungsebene, während die dritte Spur $\varkappa_3$ in der Halbirungsgeraden $\mathfrak{h}_1$ derselben liegt. Nimmt man in A_1 A_2 A_3 die Spuren einer solchen Geraden an, und bestimmt die Horizontal- und Verticalprojection derselben, die in dieselbe Gerade

einen Systems die entsprechenden Elemente in den beiden andern Systemen aufzufinden, d. h. zu der einen Spur einer Ebene oder Geraden des Strahlenbündels die zugehörigen andern Spuren zu bestimmen. Sind a' a'' a''' die Projectionen des Mittelpunktes eines Strahlenbündels, und A_1 die Horizontalspur einer Ebene desselben, (eine Gerade des Spurensystems I) gegeben, und sollen die entsprechenden Geraden der beiden andern Systeme gefunden werden, so handelt es sich zunächst um die Bestimmung der Collineationscentren ζ_{12} und ζ_{23}. Das Collineationscentrum ζ_{12} (Fig. 18b, Taf. III) der perspectivisch gelegenen Systeme I und II ist, wie oben bemerkt, die zusammenfallende Horizontal- und Verticalspur der durch den Mittelpunkt des Strahlenbündels zur Richtung $r_{x'}$ gezogenen Geraden ζ. Da diese Gerade zur Kreuzrissebene parallel ist, so fallen ihre Horizontal- und Verticalprojection ζ', ζ'' in dieselbe Senkrechte zur ersten Axe der Zeichnungsebene, während die dritte Projection ζ''' durch die Richtung $\mathfrak{r}_1$ in derselben geht. Legt man durch a' a'' a''' die Projectionen einer solchen Geraden, und bestimmt die Horizontal- und Verticalspur derselben, die in dem-

zusammenfallen, so ist diese Gerade die gesuchte Collineationsaxe $\varkappa'''$, welche durch den Schnittpunkt der Spuren A_1, A_2 gehen muss. Ebenso findet man in den Projectionen der Schnittgeraden des Raumsystems mit der Ebene $H_{z'}$, deren Vertical- und Kreuzrissspur in demselben Punkte der zweiten Axe liegen, und deren Horizontalspur in der Halbirungsgeraden $\mathfrak{h}_1$ liegt, die Collineationsaxe $\varkappa''\,'''$ der Systeme 2 und 3, die durch den Schnittpunkt der beiden Spuren A_2 und A_3 geht. Der Schnittpunkt der beiden Collineationsaxen $\varkappa'''$ und $\varkappa''\,'''$ liegt ebenfalls in der Halbirungsgeraden $\mathfrak{h}_1$ und ergibt die drei zusammenfallenden Projectionen des Schnittpunktes der Ebene im Raume mit der Halbirungsgeraden μ_y.

Durch die Aufsuchung der in einen Punkt zusammenfallenden Projectionen dieses Punktes können ebenfalls die Collineationsaxen leicht bestimmt werden. Dieser Punkt liegt in der Schnittlinie α des Raumsystems mit der Ebene H_y, deren Verticalspur α_2 in der Halbirungsgeraden $\mathfrak{h}_1$ liegt, während die Horizontal- und Kreuzrissspur α_1 α_3 in den beiden Axen der Zeichnungsebene liegen. Die Horizontal- und Kreuzrisspro-

selben Punkte zusammenfallen, so ist dieser Punkt das gesuchte Collineationscentrum ζ_{12}, welches in der Verbindungsgeraden a' a'' liegen muss. Ebenso findet man in den Spuren der zur Richtung $r_{z'}$ gezogenen Geraden desStrahlenbündels,deren Vertical- und Kreuzrissprojection in derselben Senkrechten zur zweiten Axe liegen, und deren Horizontalprojection durch die Richtung $\mathfrak{r}_1$ geht, das Collineationscentrum ζ_{23} der Systeme II und III, das in der Verbindungsgeraden der beiden Projectionen a'', a''' liegt. Die Verbindungslinie der beiden Collineationscentren ζ_{12} und ζ_{23} geht ebenfalls durch die Richtung $\mathfrak{r}_1$ und ergibt die drei zusammenfallenden Spuren der durch die Stellung ϱ_y gehenden Ebene des Strahlenbündels.

Durch die Aufsuchung der in eine Gerade zusammenfallenden Spuren dieser Ebene können ebenfalls die Collineationscentren leicht bestimmt werden. Diese Ebene enthält die zur Richtung r_y gehende Gerade a des Strahlenbündels, deren Verticalprojection a'' durch die Richtung $\mathfrak{r}_1$ geht, während die Horizontal- und Kreuzrissprojection a' a''' parallel zu den Axen der Zeichnungsebene erscheinen. Die

jection $\alpha' \alpha'''$ dieser Geraden schneiden sich in der gemeinschaftlichen Projection des erwähnten Punktes, und die Verbindungsgeraden dieser Projection mit den Schnittpunkten $A_1 . A_2$ und $A_2 . A_3$ sind die gesuchten Collineationsaxen. (Fig. 19a, Taf. IV.)

Nach Auffindung der Collineationsaxen $\varkappa'{}''$ und $\varkappa''{}'''$ lassen sich sehr leicht (Fig. 20a, Taf. IV) die entsprechenden Punkte a'' und a''' der Systeme 2 und 3 auffinden, wenn der Punkt a' des Systems 1 gegeist. Das Perpendikel von a' zur ersten Axe der Zeichnungsebene, als Collineationsstrahl, geht auch durch den Punkt a''; die durch a' und den Schnittpunkt der Geraden A_1 mit der zweiten Axe gelegte Gerade entspricht der durch den Axenschnittpunkt gehenden Geraden des Systems 2; verbindet man also den Schnittpunkt dieser durch a' gelegten Geraden und der Collineationsaxe $\varkappa'{}''$ mit dem Schnittpunkte der Axen, so muss der Punkt a'' in dieser Geraden liegen; ebenso entspricht auch der durch a' und den Axenschnittpunkt gehenden Geraden des Systems 1

Horizontal- und Kreuzrissspur $\alpha_1 \alpha_3$ dieser Geraden sind Punkte der gemeinschaftlichen Spur der erwähnten Ebene, und die Schnittpunkte dieser Spur mit den Verbindungsgeraden $a' a''$ und $a'' a'''$ sind die gesuchten Collineationscentren. (Fig. 19b, Taf. IV.)*)

Nach Auffindung der Collineationscentren ζ_{12} und ζ_{23} lassen sich sehr leicht (Fig. 20b, Taf. IV) die entsprechenden Geraden A_2 und A_3 der Systeme II und III auffinden, wenn die Gerade A_1 des Systems I gegeben ist. Der Schnittpunkt von A_1 mit der ersten Axe der Zeichnungsebene, als Collineationsaxe, ist auch ein Punkt der Geraden A_2; der Punkt, wo A_1 die durch a' gehende, zur Collineationsaxe parallele Gegenaxe im System I schneidet, hat seinen entsprechenden Punkt im Systeme II in unendlicher Entfernung; verbindet man also diesen Schnittpunkt von A_1 und der Gegenaxe mit dem Collineationscentrum ζ_{12}, so muss die Gerade A_2 zu diesem Collineationsstrahl parallel sein; ebenso liegt auch der der Richtung von A_1 entsprechende Punkt des Systems

*) Aus dieser Construction der Collineationscentren ζ_{12} und ζ_{23} sieht man leicht, dass der Abstand derselben von der Verticalprojection a'' des Mittelpunktes der Coordinate y des Punktes a, dem Abstande desselben von der Verticalebene, gleich ist.

die durch den Schnittpunkt von A_2 und der zweiten Axe gehende Gerade des Systems 2. Aus a'' wird dann auf gleiche Weise mit Hülfe der Richtung der Perpendikel zur zweiten Axe der Zeichnungsebene als Collineationscentrum und der Collineationsaxe $\varkappa''\,'''$ der entsprechende Punkt a''' des zu 2 perspectivisch gelegenen Systems 3 bestimmt. Zu einer Geraden α' des einen der drei Systeme werden die entsprechenden Geraden der beiden andern Systeme gefunden, wenn man in der gegebenen Geraden einen Punkt a' annimmt, und die demselben entsprechenden Punkte in den beiden andern Systemen nach Obigem bestimmt; durch diese Punkte und die entsprechenden Schnittpunkte mit den Collineationsaxen gehen die gesuchten Geraden α'' und α'''.

II in der durch a'' gehenden Gegenaxe desselben, also dort, wo der zu A_1 parallele Collineationsstrahl diese Gegenaxe trifft. Aus A_2 wird dann auf gleiche Weise mit Hülfe der zweiten Axe der Zeichnungsebene als Collineationsaxe, und des Collineationscentrums ζ_{23} die entsprechende Gerade A_3 des zu II perspectivisch gelegenen Systems III bestimmt. Zu einem Punkte α_1 des einen der drei Systeme werden die entsprechenden Punkte der beiden andern Systeme gefunden, wenn man durch den gegebenen Punkt eine Gerade A_1 legt, zu derselben die entsprechenden Geraden in den beiden andern Systemen nach Obigem bestimmt; in diesen Geraden und den betreffenden Collineationsstrahlen liegen die gesuchten Punkte α_2 und α_3.

Reichen diese Mittel zur Auffindung entsprechender Punkte und Geraden der drei Systeme nicht aus, was z. B. der Fall ist, wenn einer der zur Bestimmung nöthigen Schnittpunkte ausserhalb der Grenzen der disponiblen Zeichenfläche fällt, so können noch folgende Beziehungen mit Vortheil benutzt werden:

Der unendlich ferne Punkt einer Spur des Trägers des Raumsystems hat zwei seiner Projectionen in den unendlich fernen Punkten der in der entsprechenden Projectionsebene liegenden Axen, während ihre dritte Projection die Richtung

Die durch eine Axe gehende Ebene des Strahlenbündels vereinigt zwei Spuren in dieser Axe, während ihre dritte Spur die Verbindungslinie der entsprechenden Projection des Mittelpunktes des Strahlenbündels mit dem Axenschnittpunkt ist.

der betreffenden Spur selbst ist. Jeder zu einer Spur parallelen Geraden, als einer Geraden des entsprechenden Systems, entspricht also eine mit Hülfe der Collineationsaxen leicht aufzufindende Gerade, die zu der beiden Systemen angehörenden Projectionsaxe parallel ist.

Sind z. B. wieder (Fig. 21 a, Taf. IV) A_1 A_2 A_3 die Spuren des Trägers eines ebenen Systems, $\varkappa'{}''$ und $\varkappa''{}'''$ die nach dem Frühern bestimmten Collineationsaxen, und a'' ein Punkt des Systems 2, die Verticalprojection eines Punktes des Raumsystems: so findet man die entsprechenden Punkte a' und a''' der beiden andern Systeme durch Aufsuchung zweier durch sie gehenden Geraden. Die Gerade α'', die durch a'' gehend zur Spur A_2 parallel ist, hat ihre entsprechenden Geraden α' und α''' senkrecht zur Axe OY; dieselben gehen daher durch jene Punkte, in welchen α'' die Collineationsaxen $\varkappa'{}''$ und $\varkappa''{}'''$ schneidet, und sind senkrecht zur zweiten und ersten Axe der Zeichnungsebene. Die Gerade β'', durch a'' parallel zur Axe OX gezogen, hat ihre entsprechende Gerade β' im Systeme 1 parallel zur Spur A_1, während β''' mit β'' zusammenfällt. Ebenso findet man die entsprechenden Geraden γ' und γ''' zu der durch

Jedem Punkte einer solchen Verbindungslinie, als einem Punkte des betreffenden Systems, entspricht also ein mit Hülfe der Collineationscentren leicht aufzufindender Punkt der auf der entsprechenden Projectionsebene senkrechten Axe.

Sind z. B. wieder (Fig 21 b, Taf. IV) a' a'' a''' die Projectionen des Mittelpunktes eines Strahlenbündels, ζ_{12} und ζ_{23} die nach dem Frühern bestimmten Collineationscentren, und A_2 eine Gerade des Systems II, die Verticalspur einer Ebene des Bündels: so findet man die entsprechenden Geraden A_1 und A_3 der beiden andern Systeme durch Aufsuchung zweier ihrer Punkte. Der Punkt α_2, wo die Gerade A_2 die Verbindungsgerade von a'' und den Axenschnittpunkt O schneidet, hat seine entsprechenden Punkte α_1 und α_3 in der Axe OY, also dort, wo die entsprechenden Collineationsstrahlen $\alpha_2\,\zeta_{12}$ und $\alpha_2\,\zeta_{23}$ die zweite und erste Axe der Zeichnungsebene schneiden. Der Punkt β_2, der Schnittpunkt von A_2 mit der Axe OZ, hat seinen entsprechenden Punkt im Systeme I in β_1, einem Punkte der Verbindungslinie $a'O$, während β_3 mit β_2 zusammenfällt. Ebenso findet man die entsprechenden Punkte

a'' parallel zur Axe OZ gezogenen Geraden γ''. Die Schnittpunkte von α', β' und γ', sowie von α''', β''' und γ''' geben die gesuchten, a'' entsprechenden Punkte a' und a''' der Systeme 1 und 3.

Liegt der Punkt des einen Systems in der entsprechenden Spur des Trägers des ebenen Systems im Raume, so liegt sein entsprechender Punkt in einem der beiden andern Systeme in der zwischenliegenden Axe und umgekehrt.

Soll also (Fig. 22a, Taf. IV) zu einer Geraden des einen Systems, z. B. α', die zugehörige Gerade α'' des perspectivisch collinearen Systems 2, gefunden werden, so geht dieselbe zunächst durch den Schnittpunkt von α' mit der Collineationsaxe $\varkappa'''$; der in α' und A_1 liegende Punkt a' hat seinen entsprechenden a'' im Systeme 2 in der Axe OX, und ebenso liegt der Punkt b'', welcher dem Schnittpunkt von α' mit der Axe OX entspricht, in der Spur A_2 des Trägers des ebenen Systems im Raume. Die Verbindungsgerade der Punkte a'' und b'' gibt die gesuchte Gerade α'', welche die gegebene α' in einem Punkte der Collineationsaxe $\varkappa'''$ schneiden muss. Auf gleiche Weise

γ_1 und γ_3 zu dem Schnittpunkte γ_2 der Geraden A_2 mit der Axe OX. Die Verbindungslinien $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ und $\alpha_3\beta_3\gamma_3$ geben die gesuchten, A_2 entsprechenden Geraden A_1 und A_3 der Systeme I und III.

Geht die Gerade des einen Systems durch die entsprechende Projection des Mittelpunktes des Strahlenbündels, so ist ihre entsprechende Gerade in einem der beiden andern Systeme zur zwischenliegenden Axe senkrecht und umgekehrt.

Soll also (Fig. 22b, Taf. IV) zu einem Punkte des einen Systems, z. B. α_1, der zugehörige Punkt α_2 des perspectivisch collinearen Systems II, gefunden werden, so liegt derselbe zunächst in dem Collineationsstrahl $\alpha_1\zeta_{12}$; die durch α_1 und a' gehende Gerade A_1 hat ihre entsprechende A_2 im Systeme II, senkrecht zur Axe OX, und ebenso geht die Gerade B_2, welche der durch α_1 gehenden zur Axe OX senkrechten Geraden B_1 entspricht, durch die Projection a'' des Mittelpunktes des Bündels. Der Schnittpunkt der Geraden A_2 und B_2 gibt den gesuchten Punkt α_2, der in dem durch α_1 gelegten Collineationsstrahl liegen muss. Auf gleiche Weise erhält man α_3, den entsprechen-

erhält man α''', die entsprechende Gerade in dem zu 2 perspectivisch collinearen Systeme 3.

Steht der Träger des Raumsystems auf einer der Projectionsebenen senkrecht, so ist seine Spur in dieser Ebene zugleich die entsprechende Projection aller Geraden des ebenen Systems im Raume, während die Projectionen aller Punkte desselben in dieser Geraden liegen müssen. Das entsprechende System der Projectionen des Raumsystems reducirt sich also auf eine Punktreihe, deren Träger die gleichnamige Spur des Trägers des Raumsystems ist. Durch einen Punkt dieser Reihe als Projection eines Punktes des Raumsystems ist derselbe nicht vollkommen bestimmt, da jeder Punct des durch diese Projection gehenden Perpendikels dem Raumsystem angehört. Die beiden andern Projectionen dieses Punktes sind also nur insoweit bestimmt, als sie in den durch die angenommene Projection auf die zwischenliegenden Axen gezogenen Perpendikeln liegen müssen. Wird auf diese Weise eines der drei Systeme auf eine Punktreihe reducirt, so bleiben doch die Lagenverhältnisse der beiden andern Systeme unverändert. Ist also das System 1

den Punkt in dem zu II perspectivisch collinearen Systeme III.

Liegt der Mittelpunkt des Strahlenbündels in einer der Projectionsebenen, so ist seine Projection auf diese Ebene (der Punkt selbst) zugleich die entsprechende Spur aller Geraden des Strahlenbündels, während die Spuren aller Ebenen desselben durch diesen Punkt gehen müssen. Das entsprechende System der Spuren des Strahlenbündels reducirt sich also auf einen Strahlenbüschel, dessen Mittelpunct die gleichnamige Projection des Mittelpunktes des Strahlenbündels ist. Durch einen Strahl dieses Büschels, als Spur einer Ebene des Strahlenbündels, ist dieselbe nicht vollkommen bestimmt, da jede durch diese Gerade gelegte Ebene dem Strahlenbündel angehört. Die beiden andern Spuren dieser Ebene sind also nur insoweit bestimmt, als sie durch die Schnittpunkte der angenommenen Spur mit den zwischenliegenden Axen gehen müssen. Wird auf diese Weise eines der drei Systeme auf einen Strahlenbüschel reducirt, so bleiben doch die Lagenverhältnisse der beiden andern Systeme unverändert. Ist also das Sy-

oder 3 das reducirte, so liegen die andern Systeme 2 und 3, respective 1 und 2, wie früher perspectivisch collinear; nur liegt im erstern Falle die Collineationsaxe $\varkappa'''''$, wie die entsprechenden Spuren A_2 und A_3 des Raumsystems, senkrecht zur ersten, im zweiten Falle die Collineationsaxe $\varkappa'''$ mit A_1 und A_2 senkrecht zur zweiten Axe der Zeichnungsebene.

stem I oder III das reducirte, so liegen die andern Systeme II und III, respective I und II, wie früher perspectivisch collinear; nur liegt im erstern Falle das Collineationscentrum ζ_{23} wie die entsprechenden Projectionen a'' und a''' des Mittelpunktes des Strahlenbündels in der ersten, im zweiten Falle das Collineationscentrum ζ_{12} mit a' und a'' in der zweiten Axe der Zeichnungsebene.

Steht der Träger des ebenen Systems im Raume senkrecht auf zwei Projectionsebenen, mithin senkrecht auf der zwischenliegenden Axe, so liegen die entsprechenden Projectionen aller Punkte des Raumsystems in den auf dieser Axe senkrechten Spuren des Trägers, welche Gerade zugleich die allen Geraden des Raumsystems gemeinsamen Projectionen auf diese Projectionsebenen sind.

Liegt der Mittelpunkt des Strahlenbündels in zwei Projectionsebenen, mithin in der zwischenliegenden Axe, so gehen die entsprechenden Spuren aller Ebenen des Strahlenbündels durch die in dieser Axe liegenden Projectionen des Mittelpunktes, welche Punkte zugleich die allen Geraden des Strahlenbündels gemeinsamen Spuren in diesen Projectionsebenen sind.

Abweichend gestaltet sich die Construction der drei Systeme von Projectionen eines ebenen Systems im Raume, wenn dessen Träger durch den Anfangspunkt geht. Die Spuren des Trägers sind hier drei durch den Schnittpunkt der Axen gehende Gerade, von welchen zwei willkürlich angenommen werden können, die dritte aber nach §. 13 bestimmt werden muss. Die Systeme der Pro-

Abweichend gestaltet sich die Construction der drei Systeme von Spuren eines Strahlenbündels, wenn dessen Mittelpunkt in unendlicher Entfernung liegt (Parallelstrahlenbündel). Die Projectionen des Mittelpunktes sind hier drei Richtungen in der Zeichnungsebene, von welchen zwei willkürlich angenommen werden können, die dritte aber nach §. 13 bestimmt werden muss. Die Spurensy-

jectionen 1 und 2, sowie 2 und 3 sind auch hier perspectivisch collinear (affin), aber die Collineationsaxen $\varkappa'{}''$ und $\varkappa''{}'''$ gehen ebenfalls durch den Axenschnittpunkt.

Zur Bestimmung der Collineationsaxen $\varkappa'{}''$ und $\varkappa''{}'''$ ist das allgemeine Verfahren nicht mehr anwendbar, aber man kann zu diesem Zwecke dieselbe Gerade α des Raumsystems benutzen, welche nach §. 13 zur Auffindung der dritten Spur des Trägers des gegebenen ebenen Systems angenommen wurde. Die drei Projectionen α', α'', α''' dieser Geraden sind entsprechende Gerade der drei von den Projectionen des Raumsystems gebildeten Systeme, und wegen der perspectivischen Lage der Systeme 1 und 2, 2 und 3 geben die Verbindungsgeraden der Schnittpunkte von $\alpha'\alpha''$ und $\alpha''\alpha'''$ mit dem Axenschnittpunkt die gesuchten Collineationsaxen $\varkappa'{}''$ und $\varkappa''{}'''$. (Fig. 23a, Taf. IV.)

Einander entsprechende Punkte und Gerade der drei Systeme werden mit Hülfe der Collineationsaxen $\varkappa'{}''$ und $\varkappa''{}'''$ auf gleiche Weise wie in den

steme I und II, sowie II und III sind auch hier perspectivisch collinear, aber die Collineationscentren ζ_{12} und ζ_{23} sind ebenfalls unendlich fern, d. i. bestimmte Richtungen. Alle Collineationsstrahlen sind parallel, die allgemeine Collineation der drei Systeme geht also hier in den speciellen Fall der Affinität über.

Zur Bestimmung der die Collineationscentren ζ_{12} und ζ_{23} darstellenden Richtungen ist das allgemeine Verfahren nicht mehr anwendbar, aber man kann zu diesem Zwecke dieselbe Gerade α des Bündels benutzen, welche nach §. 13 zur Auffindung der dritten Projection (Richtung) des Mittelpunktes des Strahlenbündels angenommen wurde. Die drei Spuren α_1 α_2 α_3 dieser Geraden sind entsprechende Punkte der drei Spurensysteme, und wegen der perspectivischen Lage der affinen Systeme I und II, II und III geben die Richtungen der Verbindungsgeraden $\alpha_1\alpha_2$ und $\alpha_2\alpha_3$ die gesuchten Collineationscentren ζ_{12} und ζ_{23}. (Fig. 23b, Taf. IV.)

Einander entsprechende Gerade und Punkte der drei Systeme werden mit Hülfe der Richtungen ζ_{12} und ζ_{23} auf gleiche Weise wie in den

frühern Fällen gefunden. Seien A_1 A_2 A_3 (Fig. 24a, Taf. IV) die durch den Axenschnittpunkt gehenden Spuren des Trägers des Raumsystems, $\varkappa' \, ''$ und $\varkappa'' \, '''$ die gefundenen Collineationsaxen, und a' ein Punkt des Systems 1 (die Horizontalprojection eines Punktes des Raumsystems), so liegt der entsprechende Punkt a'' in dem von a' zur ersten Axe gezogenen Perpendikel (Collineationsstrahl). Die Gerade β', welche durch a' parallel zu A_1 gezogen ist, hat ihre entsprechende Gerade β'' senkrecht zur Axe OZ, und durch den Schnittpunkt von β' mit der Collineationsaxe gehend; ebenso findet man γ'', die entsprechende Gerade zu γ', welche letztere durch a' senkrecht zur Axe OY gezogen wird, parallel zur Spur A_2. Der Schnittpunkt der Geraden β'' und γ'' gibt dann den dem Punkte a' entsprechenden Punkt a'' im Systeme 2, welcher mit a' in derselben Senkrechten zur Axe OX liegen muss. Auf gleiche Weise erhält man mit Hülfe der Collineationsaxe $\varkappa'' \, '''$ den a'' entsprechenden Punkt a''' im Systeme 3, durch Bestimmung der den Geraden γ'' oder δ'' entsprechenden Geraden γ''' und δ'''.

So wie man aus den Spuren

Fällen gefunden. Seien die Richtungen $a' a'' a'''$ (Fig. 24b, Taf. IV) die Projectionen des Mittelpunktes des Strahlenbündels, die Richtungen ζ_{12} und ζ_{23} die gefundenen Collineationscentren, und A_1 eine Gerade des Systems I (die Horizontalspur einer Ebene des Bündels), so ist der Schnittpunkt von A_1 mit der ersten Axe (Collineationsaxe) ein Punkt der entsprechenden Geraden A_2. Der Schnittpunkt β_1 der Geraden A_1 mit der zur Richtung a' vom Axenschnittpunkt O gezogenen Geraden hat seinen entsprechenden Punkt β_2 in der Axe OZ und in dem zur Richtung ζ_{12} gezogenen Collineationsstrahl durch β_1; ebenso findet man γ_2, den entsprechenden Punkt zum Schnittpunkt γ_1 der Geraden A_1 mit der Axe OY, in der durch O zur Richtung a'' gezogenen Geraden. Die Verbindungslinie $\beta_2 \gamma_2$ gibt die der Geraden A_1 entsprechende Gerade A_2 im Systeme II, welche A_1 in der Axe OX schneiden muss. Auf gleiche Weise erhält man mit Hülfe des Collineationscentrums ζ_{23} die A_2 entsprechende Gerade A_3 im Systeme III, durch Bestimmung der den Punkten γ_2 oder δ_2 entsprechenden Punkte γ_3 und δ_3.

So wie man aus den Pro-

des Trägers eines ebenen Systems die Collineationsaxen $\varkappa'{}''$ und $\varkappa''{}'''$ zu bestimmen im Stande ist, so sind auch umgekehrt diese Collineationsaxen hinreichend zur Charakterisirung des ebenen Systems, und können aus denselben die Spuren des Trägers A bestimmt werden. Seien z. B. $\varkappa'{}''$ und $\varkappa''{}'''$ (Fig. 19a, Taf. IV) die beiden Collineationsaxen, welche nach dem Frühern sich in einem Punkte der Halbirungsgeraden $\mathfrak{h}_1$ schneiden müssen, so findet man zunächst A_2, die Verticalspur des Trägers, in der Verbindungslinie der Punkte, in welchen $\varkappa'{}''$ und $\varkappa''{}'''$ die erste, beziehungsweise zweite Axe der Zeichnungsebene schneiden. Bestimmt man nun den Schnittpunkt von A_2 mit der Halbirungsgeraden $\mathfrak{h}_1$, fällt die Senkrechten von diesem Punkte zu den beiden Axen, und verbindet die Fusspunkte dieser Perpendikel mit dem Schnittpunkte $\varkappa'{}'' \,.\, \varkappa''{}'''$; so gehen die gesuchten Spuren A_1 und A_3 durch die Schnittpunkte α_1 α_3 dieser Verbindungsgeraden, α' und α''', mit den Axen der Zeichnungsebene.

jectionen des Mittelpunktes eines Strahlenbündels die Collineationscentren ζ_{12} und ζ_{23} zu bestimmen im Stande ist, so sind auch umgekehrt diese Collineationscentren zur Charakterisirung des Strahlenbündels ausreichend, und können aus denselben die Projectionen des Mittelpunktes a bestimmt werden. Seien z. B. ζ_{12} und ζ_{23} (Fig. 19b, Taf. IV) die beiden Collineationscentren, welche nach dem Frühern in einer durch die Richtung $\mathfrak{r}_1$ gehenden Geraden liegen müssen, so findet man zunächst a'', die Verticalprojection des Mittelpunkts, in dem Durchschnitte der von ζ_{12} zur ersten, und von ζ_{23} zur zweiten Axe der Zeichnungsebene gefällten Senkrechten. Zieht man durch a'' die durch die Richtung $\mathfrak{r}_1$ gehende Gerade α'' und errichtet in den Schnittpunkten derselben mit den beiden Axen zu diesen Axen Senkrechte, welche man mit der Geraden ζ_{12} ζ_{23} selbst zum Schnitte bringt; so liegen die gesuchten Projectionen a' und a''' in den durch diese Schnittpunkte α_1 α_3 gelegten Parallelen, α' und α''', zu den Axen der Zeichnungsebene.

§. 18. Zur Bestimmung des Strahlenbüschels muss sein Träger und sein Mittelpunkt gegeben sein, von welchen beiden Elementen eines willkürlich angenommen werden kann,

das andere aber in so weit bestimmt erscheint, als der Träger des Büschels durch den angenommenen Mittelpunkt gehen, oder der Mittelpunkt in dem etwa angenommenen Träger liegen muss. Da die Elemente des Strahlenbüschels Gerade sind, so kann die Darstellung desselben entweder durch die Projectionen oder Spuren seiner Elemente erfolgen, von denen die erstern durch die Projectionen seines Mittelpunktes gehen, die letztern in den Spuren seines Trägers liegen müssen.

Die Projectionen der Strahlen eines Strahlenbüschels bilden drei projectivische Strahlenbüschel, deren Mittelpunkte die drei Projectionen des Mittelpunktes des gegebenen Strahlenbüschels sind. Die durch die Horizontal- und Vertical-, beziehungsweise Vertical- und Kreuzrissprojectionen gebildeten Strahlenbüschel sind perspectivisch gelegen; die Geraden, in welchen sich die entsprechenden Strahlen dieser Büschel schneiden, sind die Collineationsaxen x''' und x'''' des Trägers des Strahlenbüschels.

Die Spuren der Strahlen eines Strahlenbüschels bilden drei projectivische Punktreihen, deren Träger die drei Spuren der Ebene des gegebenen Strahlenbüschels sind. Die durch die Horizontal- und Vertical-, beziehungsweise Vertical- und Kreuzrissspuren gebildeten Punktreihen sind perspectivisch gelegen; die Punkte, durch welche die Verbindungslinien der entsprechenden Punkte dieser Punktreihen gehen, sind die Collineationscentren ζ_{12} und ζ_{23} des Mittelpunktes des Strahlenbüschels.

Aufgaben über die gegenseitige Bestimmung geometrischer Elemente und Grundgebilde.

§. 19. In den vorhergehenden Paragraphen haben wir die Arten der Darstellung der geometrischen Elemente, und der aus denselben erzeugten Grundgebilde der ersten und zweiten Stufe erörtert; wir kommen nun zu einer Reihe von Aufgaben, welche uns die Aufsuchung und Darstellung solcher geometrischer Elemente und Grundgebilde lehren, die nach den in der Einleitung angeführten Lagenbeziehungen durch zwei oder mehrere gegebene bestimmt erscheinen.

Die hierher gehörigen Aufgaben, welche zur Aufsuchung eines geometrischen Elementes führen, das durch gegebene andere bestimmt ist, sind, in Uebereinstimmung mit den in der Einleitung angeführten Lagenbeziehungen zwischen den einzelnen geometrischen Elementen, folgende:

1a. Es ist die Gerade α darzustellen, welche durch zwei durch ihre Projectionen gegebene Punkte a und b geht.

1b. Es ist die Gerade α darzustellen, in welcher sich zwei durch ihre Spuren gegebene Ebenen A und B schneiden.

2a. Es soll durch zwei Gerade α und β, die sich in einem Punkte a schneiden, eine Ebene A gelegt werden.

2b. Es soll der Schnittpunkt a zweier in einer Ebene A gelegener Geraden bestimmt werden.

3a. Es soll die Ebene A dargestellt werden, welche durch eine gegebene Gerade α und einen nicht in ihr liegenden Punkt a geht.

3b. Es soll der Punkt a dargestellt werden, in welchem eine gegebene Gerade α eine nicht durch sie gehende Ebene A schneidet.

4a. Es ist die Ebene A darzustellen, welche durch drei gegebene Punkte a, b und c geht.

4b. Es ist der Punkt a darzustellen, in welchem drei gegebene Ebenen A, B und C sich schneiden.

Die Lösungen dieser vier Aufgaben sollen nun sowohl bei allgemeiner, als auch bei specieller Lage der gegebenen Elemente, welch' letztere oft eine abweichende Construction bedingt, durchgeführt werden.

1a. Seien (Fig. 25a, Taf. V) a' a'' a''' und b' b'' b''' die Projectionen der gegebenen Punkte, so sind die Verbindungsgeraden der entsprechenden Projectionen dieser Punkte die drei Projectionen α', α'' und α''' der gesuchten Geraden, aus welchen sich die drei Spuren α_1, α_2 und α_3 derselben bestimmen lassen.

1b. Seien (Fig. 25b, Taf. V) A_1 A_2 A_3 und B_1 B_2 B_3 die Spuren der gegebenen Ebenen, so sind die Schnittpunkte der gleichnamigen Spuren dieser Ebenen die drei Spuren α_1 α_2 und α_3 der gesuchten Geraden, aus welchen sich die drei Projectionen α', α'' und α''' derselben bestimmen lassen.

Specielle Lagen der gegebenen Punkte bedingen eine spe-

Specielle Lagen der gegebenen Ebenen bedingen eine spe-

cielle Lage ihrer Verbindungsgeraden.

Geht die Verbindungsgerade eines Paares von Projectionen der gegebenen Punkte, als entsprechende Projection der Geraden α im Raume, durch den Schnittpunkt der Axen, so geht die gesuchte Verbindungsgerade durch eine Projectionsaxe; die beiden andern Projectionen schneiden sich in einem Punkte dieser Axe, in welchem die beiden entsprechenden Spuren dieser Geraden vereinigt erscheinen. (Fig. 26a, Taf. V.)

Liegen die Verbindungsgeraden zweier Paare von Projectionen der gegebenen Punkte in derselben Senkrechten zur zwischenliegenden Axe, so ist die Gerade zur dritten Projectionsebene parallel. Zwei ihrer Spuren liegen in dieser Senkrechten, während die dritte der unendlich ferne Punkt der entsprechenden Projection der Geraden ist. (Fig. 27a, Taf. V.)

Fällt ein Paar von Projectionen der gegebenen Punkte in denselben Punkt zusammen, so ist derselbe auch die Projection der Verbindungsgeraden, welche also auf der betreffenden Projectionsebene senkrecht ist.

cielle Lage ihrer Schnittgeraden.

Liegt der Schnittpunkt eines Paares von Spuren der gegebenen Ebenen, als entsprechende Spur der Geraden α im Unendlichen, d. h. sind die betreffenden Spuren parallel, so ist die gesuchte Schnittlinie zu einer Projectionsebene parallel; die beiden andern Spuren liegen in derselben Senkrechten zu der auf dieser Projectionsebene senkrechten Axe, in welcher die beiden entsprechenden Projectionen dieser Geraden vereinigt erscheinen. (Fig. 26b, Taf. V.)

Fallen die Schnittpunkte zweier Paare von Spuren der gegebenen Ebenen in denselben Punkt der zwischenliegenden Axe, so geht die Schnittgerade durch diesen Punkt der Axe. Zwei ihrer Projectionen gehen durch diesen Punkt, während die dritte die Verbindungslinie der entsprechenden Spur der Geraden mit dem Axenschnittpunkt ist. (Fig. 27b, Taf. V.)

Fällt ein Paar von Spuren der gegebenen Ebene in dieselbe Gerade zusammen, so ist dieselbe auch die Spur der Schnittgeraden, welche also in der betreffenden Projectionsebene liegt.

Liegt einer der gegebenen Punkte in einer Projectionsebene, so ist er (seine betreffende Projection) zugleich die entsprechende Spur der Verbindungsgeraden.

Liegt einer der gegebenen Punkte in einer Projectionsaxe, so schneidet die gesuchte Verbindungsgerade die betreffende Axe in diesem Punkte, in welchem daher zwei Spuren derselben vereinigt sind.

Gehen alle drei Verbindungsgeraden der gleichnamigen Projectionen der beiden gegebenen Punkte durch den Schnittpunkt der Axen, so geht auch die Gerade im Raume durch den Anfangspunkt. Ihre drei Spuren sind im Axenschnittpunkt vereinigt, während die durch diesen Punkt gehenden Verbindungsgeraden der gleichnamigen, gegebenen Projectionen der Punkte als die Projectionen der gesuchten Raumgeraden erscheinen.

Steht eine der gegebenen Ebenen zu einer der Projectionsebenen senkrecht, so ist ihre betreffende Spur zugleich die entsprechende Projection der Schnittgeraden.

Ist eine der gegebenen Ebenen zu einer Projectionsebene parallel, so ist die gesuchte Schnittgerade zu derselben ebenfalls parallel, und zwei Projectionen derselben erscheinen in den betreffenden Spuren der gegebenen Ebene.

Liegen alle drei Schnittpunkte der gleichnamigen Spuren der beiden gegebenen Ebenen im Unendlichen, d. h. sind diese Spuren paarweise parallel, so liegt auch die gesuchte Schnittgerade im Unendlichen, die gegebenen Ebenen sind parallel. Ihre drei Projectionen sind in der unendlich fernen Geraden vereinigt, während die gemeinsamen Richtungen der gleichnamigen, gegebenen Spuren der Ebenen als die Spuren der gesuchten, unendlich fernen Schnittgeraden erscheinen.

So lassen sich die gegebenen Bedingungen noch mannigfaltig verändern, doch bleibt in allen diesen Fällen die Construction wesentlich dieselbe, wenn nur auf die schon bekannten Verhältnisse der Projectionen und Spuren von Geraden, die eine specielle Lage gegen die Projectionsebenen haben, gehörig Rücksicht genommen wird. In den beiden folgenden Beispielen jedoch reichen, wegen der speciellen Lage der gegebenen Elemente, die bisher angewendeten Methoden nicht aus, und muss eine besondere Hilfsconstruction eintreten.

Liegen die beiden gegebenen Punkte a, b im Unendlichen, so sind ihre Projectionen bestimmte Richtungen in der Zeichnungsebene; die durch sie gelegte Gerade α liegt ebenfalls im Unendlichen. Die drei Projectionen dieser Geraden fallen in der unendlich fernen Geraden zusammen, sie kann daher nur durch ihre Spuren, drei unendlich ferne Punkte, Richtungen, dargestellt werden. Um die diese Spuren darstellenden Richtungen zu finden, nimmt man einen Punkt c, am besten in einer der Axen, an, und legt durch denselben und die gegebenen Richtungen a und b zwei Gerade β und γ, die, da sie sich in dem angenommenen Punkt c schneiden, in einer Ebene A liegen müssen. Die unendlich fernen Punkte (Richtungen) der Spuren dieser Ebene sind die gesuchten Spuren der Verbindungsgeraden α.

Es seien z. B. $a' \, a''$ und $b' \, b''$ (Fig. 28a, Taf. V) die Horizontal- und Verticalprojectionen zweier unendlich ferner Punkte a und b, und $c' \, c'' \, c'''$ die Projectionen eines Punktes der Axe OZ, dessen Horizontalprojection im Axenschnittpunkte liegt. Legen wir nun durch c' und c'' die Horizontal- und Verticalprojectionen

Gehen die beiden gegebenen Ebenen A, B durch den Anfangspunkt, so gehen ihre Spuren durch den Schnittpunkt der Axen; ihre Schnittgerade α geht ebenfalls durch den Anfangspunkt. Die Spuren dieser Geraden fallen im Axenschnittpunkt zusammen, sie kann daher nur durch ihre Projectionen, drei durch den Schnittpunkt der Axen gehende Gerade, dargestellt werden. Um diese Projectionen zu finden, nimmt man eine Ebene C, am besten parallel zu einer Projectionsebene, an, und bestimmt die Schnittgeraden β und γ dieser Ebene mit den beiden gegebenen Ebenen A und B; diese Geraden müssen sich, da sie in der angenommenen Ebene C liegen, in einem Punkte a schneiden. Die Verbindungsgeraden der Projectionen dieses Punktes mit dem Axenschnittpunkt sind die gesuchten Projectionen der Schnittgeraden α.

Es seien z. B. $A_1 \, A_2$ und $B_1 \, B_2$ (Fig. 28b, Taf. V) die Horizontal- und Verticalspuren zweier, durch den Anfangspunkt gehender Ebenen A und B, und $C_2 \, C_3$ die Spuren einer zur Horizontalebene parallelen Ebene, deren Horizontalspur die unendlich ferne Gerade ist. Die Schnittpunkte $\beta_1 \, \gamma_1$ und $\beta_2 \, \gamma_2$ der Spuren A_1, B_1, A_2, B_2

β', γ' und β'', γ'' von zwei Geraden, welche durch die Richtungen a und b gehen, und welche Projectionen durch die gegebenen Richtungen a', b'; a'', b'', gehen müssen; bestimmen ferner die zugehörigen Kreuzrissprojectionen β''' und γ''' dieser Geraden; so sind die Richtungen der letztern zugleich die Kreuzrissprojectionen a''' und b''' der zwei gegebenen Richtungen. Von den Spuren dieser Geraden fallen die Vertical- und Kreuzrissspuren mit dem Punkte c'', c''' zusammen, während die Horizontalspuren β_1 und γ_1 nach den bekannten Methoden gefunden werden können. Die Verbindungsgerade $\beta_1 \gamma_1$ gibt die Horizontalspur A_1 der Ebene A, deren Vertical- und Kreuzrissspur A_2 und A_3 durch die Punkte c'' c''' gehen müssen. Die unendlich fernen Punkte, die Richtungen der drei Spuren A_1 A_2 A_3 geben die gesuchten Spuren der Geraden α, welche zugleich als die Stellung der Ebene A, da dieselbe die beiden Richtungen a und b enthält, erscheint.

2a. Schneiden sich die durch ihre Projectionen α' α'' α''' und β' β'' β''' (Fig. 29a, Taf. V) dargestellten Geraden α und β in einem Punkte a, so müssen die mit den Spuren der Ebene C, von denen die erstern, weil C_1 die unendlich ferne Gerade ist, als die Richtungen der Spuren A_1 und B_1 erscheinen, geben die Horizontal- und Verticalspuren der Schnittgeraden β und γ der Ebenen A und B mit C. Bestimmen wir die zugehörigen Kreuzrissspuren β_3 und γ_3 dieser Geraden, so sind die Verbindungslinien derselben mit dem Axenschnittpunkt zugleich die Kreuzrissspuren A_3 und B_3 der zwei gegebenen Ebenen. Von den Projectionen dieser Geraden fallen die Vertical- und Kreuzrissprojectionen mit der Geraden C_2 C_3 zusammen, während die Horizontalprojectionen β' und γ' nach den bekannten Methoden gefunden werden können. Der Schnittpunkt von β' und γ' gibt die Horizontalprojection a' des Punktes a, dessen Vertical- und Kreuzrissprojection in den Geraden C_2 C_3 liegen müssen. Die Verbindungslinien der drei Projectionen a' a'' a''' mit dem Schnittpunkt der Axen geben die gesuchten Projectionen der Schnittgeraden α der beiden Ebenen A und B.

2b. Liegen die durch ihre Spuren α_1 α_2 α_3 und β_1 β_2 β_3 (Fig. 29b, Taf. V) dargestellten Geraden α und β in einer Ebene A, so müssen die Ver-

Schnittpunkte a' a'' a''' der gleichnamigen Projectionen dieser Geraden zugleich als die Projectionen des Schnittpunktes a der Raumgeraden erscheinen, d. h. den Bedingungen der Projectionen eines Punktes entsprechen. Die Verbindungsgeraden der gleichnamigen Spuren α_1 α_2 α_3 und β_1 β_2 β_3 der gegebenen Geraden geben die drei Spuren A_1 A_2 A_3 der durch sie gelegten Ebene.

Jede Gerade γ, welche irgend zwei Punkte b, c dieser Geraden, deren Projectionen in den Projectionen der gegebenen Geraden liegen müssen, verbindet, muss in derselben Ebene liegen; ihre Spuren γ_1 γ_2 γ_3 liegen daher in den entsprechenden Spuren der Ebene A.

Specielle Fälle. Ist der Schnittpunkt der Geraden ein unendlich ferner Punkt, d. h. sind die Geraden parallel, so schneiden sich ihre Projectionen ebenfalls in unendlich fernen Punkten der Zeichnungsebene, d. h. sie sind parallel. Die Verbindungsgeraden der gleichnamigen Spuren dieser Geraden geben wieder die Spuren der durchgelegten Ebene.

Haben die Geraden eine, z. B. die Horizontalprojection gemeinsam, so ist dieselbe zugleich die Horizontalspur der

bindungsgeraden A_1 A_2 A_3 der gleichnamigen Spuren dieser Geraden zugleich als die Spuren der durch die Gerade gelegten Ebene A erscheinen, d. h. den Bedingungen der Spuren einer Ebene entsprechen. Die Schnittpunkte der gleichnamigen Projectionen α' α'' α''' und β' β'' β''' der gegebenen Geraden geben die drei Projectionen a' a'' a''' des Schnittpunktes derselben.

Jede Gerade γ, in welcher sich irgend zwei durch diese Geraden gelegte Ebenen B, C, deren Spuren durch die Spuren der gegebenen Geraden gehen müssen, schneiden, muss durch denselben Punkt gehen; ihre Projectionen γ' γ'' γ''' gehen daher durch die entsprechenden Projectionen des Punktes a.

Specielle Fälle. Geht die Ebene der beiden Geraden durch den Anfangspunkt, so geht die Verbindungslinie der gleichnamigen Spuren der Geraden ebenfalls durch den Schnittpunkt der Axen in der Zeichnungsebene. Die Schnittpunkte der gleichnamigen Projectionen dieser Geraden geben wieder die Projectionen des Schnittpunktes derselben.

Haben die Geraden eine, z. B. die Horizontalspur gemeinsam, so ist dieselbe zugleich die Horizontalprojection

durchgelegten Ebene, welche in diesem Falle senkrecht zur Horizontalebene ist. Die beiden andern Spuren sind dann, wie bekannt, senkrecht zu den Axen OX und OY.

Sind eine oder beide Gerade zu einer Projectionsebene senkrecht, so ist auch die durchgelegte Ebene zu dieser Projectionsebene senkrecht.

Steht die eine Gerade auf einer, die zweite auf einer andern Projectionsebene senkrecht, so sind die entsprechenden, als Punkte erscheinenden Projectionen der beiden Geraden zugleich die Projectionen des Schnittpunktes, liegen also in den Senkrechten zur zwischenliegenden Axe. Die durch diese Geraden gelegte Ebene ist zu dieser Axe senkrecht.

Geht eine der beiden Geraden durch den Anfangspunkt, so geht auch jede durch dieselbe gelegte Ebene durch diesen Punkt. Die Projectionen der Geraden gehen durch den Axenschnittpunkt, in welchem auch die Spuren derselben vereinigt sind; die Verbindungsgeraden der drei Spuren der zweiten Geraden mit dem Schnittpunkt der Axen geben also die Spuren der durchgelegten Ebene.

Gehen beide Gerade durch den Anfangspunkt, so ist die-

des Schnittpunktes, welcher in diesem Falle in der Horizontalebene liegt. Die beiden andern Projectionen liegen dann, wie bekannt, in den Axen OX und OY.

Liegen eine oder beide Gerade in einer Projectionsebene, so liegt auch ihr Schnittpunkt in dieser Projectionsebene.

Liegt die eine Gerade in einer, die zweite in einer andern Projectionsebene, so sind die entsprechenden, als Gerade erscheinenden Spuren der beiden Geraden zugleich die Spuren der durchgelegten Ebene, müssen sich also in einem Punkte der zwischenliegenden Axe schneiden. Der Schnittpunkt der beiden Geraden ist dann dieser Punkt der Axe.

Liegt eine der beiden Geraden im Unendlichen, so ist auch jeder ihrer Punkte ein unendlich entfernter Punkt (Richtung). Die Spuren der Geraden sind drei Punkte der unendlich fernen Geraden (Richtungen), in welcher auch die Projectionen derselben vereinigt sind; die unendlich fernen Punkte der drei Projectionen der zweiten Geraden sind also die Projectionen des Schnittpunktes.

Liegen beide Gerade in der unendlich fernen Ebene, so ist

ser Punkt ihr gemeinsamer Schnittpunkt, und in demselben sind alle Spuren der beiden Geraden vereinigt. Um die Spuren der durch sie gelegten Ebene, welche alle durch den Axenschnittpunkt gehen müssen, zu erhalten, nimmt man in den beiden Geraden je einen Punkt an. Die Verbindungslinie der Spuren der durch diese Punkte gelegten Geraden mit dem Axenschnittpunkt geben die gesuchten Spuren.

Noch einfacher gestaltet sich die Construction, wenn man zur Darstellung der, durch die beiden Geraden gelegten Ebene die beiden Collineationsaxen $\varkappa'\,''$ und $\varkappa''\,'''$ benutzt, aus welchen sich auch die Spuren der Ebene leicht bestimmen lassen.

Seien z. B. wieder $\alpha'\ \alpha''\ \alpha'''$ und $\beta'\ \beta''\ \beta'''$ (Fig. 30a, Taf. V) die Projectionen der beiden sich im Punkte a schneidenden Geraden α und β, so liegen die Schnittpunkte der Projectionen α' und α'', β' und β'' in der Collineationsaxe $\varkappa'\,''$, und ebenso ergeben die Schnittpunkte von α'' und α''', β'' und β''' die Collineationsaxe $\varkappa''\,'''$, welche Collineationsaxen sich in einem Punkte der Halbirungsgeraden $\mathfrak{h}_1$ der Zeichnungsebene schneiden müssen. Aus den Collineationsaxen erhält man die

diese die durch sie gelegte Ebene, und in der unendlich fernen Geraden sind alle Projectionen der beiden Geraden vereinigt. Um die Projectionen ihres Schnittpunktes, welche in dieser unendlich fernen Geraden liegen müssen, zu erhalten, legt man durch beide Geraden je eine Ebene. Die unendlich fernen Punkte der Projectionen der Schnittgeraden dieser beiden Ebenen sind die gesuchten Projectionen.

Noch einfacher gestaltet sich die Construction, wenn man zur Darstellung des Schnittpunktes der beiden Geraden die beiden Collineationscentren ζ_{12} und ζ_{23} benutzt, aus welchen sich auch die Projectionen des Punktes leicht bestimmen lassen.

Seien z. B. wieder $\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3$ und $\beta_1\ \beta_2\ \beta_3$ (Fig. 30b, Taf. V) die Spuren der beiden in der Ebene A liegenden Geraden α und β, so gehen die Verbindungsgeraden der Spuren α_1 und α_2, β_1 und β_2 durch das Collineationscentrum ζ_{12}, und ebenso ergeben die Verbindungslinien von α_2 und α_3, β_2 und β_3 das Collineationscentrum ζ_{23}, welche Collineationscentren in einer, durch die Richtung $\mathfrak{r}_1$ der Zeichnungsebene gehenden Geraden liegen müssen. Aus den Collineations-

Spuren A_1 A_2 A_3 der gesuchten Ebene auf bekannte Weise.

3a. Sind (Fig. 31 a, Taf. VI) α' α'' α''' die Projectionen und α_1 α_2 α_3 die Spuren der gegebenen Geraden und a' a'' a''' die Projectionen des gegebenen Punktes, so nimmt man in der gegebenen Geraden einen Punkt b an; bestimmt man dann die Projectionen β' β'' β''' und die Spuren β_1 β_2 β_3 der Verbindungsgeraden β der Punkte a und b, so geben die Verbindungsgeraden der gleichnamigen Spuren der Geraden α und β die Spuren A_1 A_2 A_3 der gesuchten Ebene.

Einfacher gestaltet sich die Construction, wenn man in der, nur durch ihre Spuren α_1 α_2 α_3 gegebenen Geraden α, statt des willkürlich gewählten Punktes b, den mit einer der Spuren z. B. α_2 zusammenfallenden Punkt v in dieser Projectionsebene annimmt, weil die Projectionen dieses Punktes leicht gefunden werden können, ohne die Projectionen von α zu bestimmen. Die Spuren β_1 β_2 β_3 der Geraden av, deren Verticalspur β_2 aber mit α_2 zusammenfällt, bestimmen auch hier mit den Spuren der Geraden α die Spuren der gesuchten Ebene. (Fig. 32 a, Taf. VI.)

centren erhält man die Projectionen a' a'' a''' des gesuchten Punktes auf bekannte Weise.

3b. Sind (Fig. 31 b, Taf. VI) α_1 α_2 α_3 die Spuren und α' α'' α''' die Projectionen der gegebenen Geraden und A_1 A_2 A_3 die Spuren der gegebenen Ebene, so legt man durch die gegebene Gerade eine Ebene B; bestimmt man dann die Spuren β_1 β_2 β_3 und die Projectionen β' β'' β''' der Schnittgeraden β der Ebenen A und B, so geben die Schnittpunkte der gleichnamigen Projectionen der Geraden α und β die Projectionen a' a'' a''' des gesuchten Punktes.

Einfacher gestaltet sich die Construction, wenn man durch die, nur durch ihre Projectionen α' α'' α''' gegebene Gerade α, statt der willkürlich gewählten Ebene B, die zu einer z. B. der Verticalebene senkrechte Ebene V annimmt, weil die Spuren dieser Ebene leicht gefunden werden können, ohne die Spuren von α zu bestimmen. Die Projectionen β' β'' β''' der Schnittgeraden der Ebenen A und V, deren Verticalprojection β'' aber mit α'' zusammenfällt, bestimmen auch hier mit den Projectionen der Geraden α die Projectionen des gesuchten Punktes. (Fig. 32 b, Taf. VI.)

Bei besonderen Lagen der gegebenen Elemente verändert sich die Construction in einzelnen Punkten, z. B.

Liegt die Gerade α im Unendlichen, sind ihre Spuren α_1 α_2 α_3 daher drei Richtungen in der Zeichnungsebene, so ist die Gerade β, welche den gegebenen Punkt a mit einer der im Unendlichen befindlichen Spuren z. B. α_1 verbindet, zur Horizontalebene parallel. Die Vertical- und Kreuzrissspur β_2 und β_3 dieser Geraden geben Punkte der gleichnamigen Spuren der gesuchten Ebene, welche Spuren durch die gegebenen Richtungen $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$ gehen müssen. (Fig. 33a, Taf. VI.)*)

Geht die Gerade α durch den Anfangspunkt, so geht auch jede durch sie gelegte, mithin auch die gesuchte Ebene durch diesen Punkt. Da aber alle drei Spuren dieser Geraden im Axenschnittpunkt vereinigt sind, so kann die Hülfsgerade β nur durch Verbindung irgend eines willkürlichen Punktes der gegebenen Geraden α, der nicht in einer Projectionsebene liegt, daher mit keiner Spur zusammenfällt,

Geht die Gerade α durch den Anfangspunkt, sind daher ihre Projectionen $\alpha' \alpha'' \alpha'''$ drei durch den Axenschnittpunkt gehende Gerade, so geht die Gerade β, die Schnittlinie der Ebene A mit der durch α senkrecht zu einer, z. B. der Horizontalebene gelegten Ebene, durch die Axe OZ. Die Schnittpunkte der Vertical- und Kreuzrissprojection β'' und β''' dieser Geraden mit den gleichnamigen Projectionen der Geraden α, geben die Projectionen a'' und a''' des gesuchten Punktes, aus welchen a' leicht bestimmt werden kann. (Fig. 33b, Taf. VI.)

Liegt die Gerade α im Unendlichen, so ist auch jeder ihrer Punkte, mithin auch der gesuchte, ein unendlich ferner Punkt, eine Richtung. Da aber alle drei Projectionen dieser Geraden in der unendlich fernen Geraden vereinigt sind, so kann die Hülfsgerade β nur als die Schnittlinie einer willkürlich durch die Stellung α gelegten Ebene, die zu keiner Projectionsebene senkrecht ist, mit der gegebenen Ebene A

*) Da die gegebenen Richtungen α_1 α_2 α_3 zugleich die Richtungen der Spuren jeder Ebene des Parallelebenenbüschels sind, dessen Axe die gegebene, unendlich ferne Gerade α ist; so ist die gegebene Construction auch die Lösung der Aufgabe: Durch einen gegebenen Punkt eine Ebene parallel zu einer gegebenen Ebene zu legen.

mit dem gegebenen Punkte a angenommen werden. Die Verbindungslinien der Spuren der Geraden β mit dem Axenschnittpunkt geben die Spuren der gesuchten Ebene.

Ist der gegebene Punkt a der Anfangspunkt, so sind die Verbindungslinien der Spuren der gegebenen Geraden α mit dem Axenschnittpunkt die Spuren der gesuchten Ebene.

Eine wesentliche Vereinfachung erfährt die Construction, wenn der gegebene Punkt a in einer der Projectionsebenen liegt, da in diesem Falle die entsprechende Spur jeder durch ihn gelegten Ebene durch seine gleichnamige Projection gehen muss. Die Verbindungslinie der entsprechenden Spur der Geraden α mit dieser Projection des Punktes a gibt die entsprechende Spur der gesuchten Ebene, aus welcher die beiden andern Spuren, die durch die gleichnamigen Spuren der Geraden α gehen müssen, leicht entwickelt werden können.

Ist der Punkt a nicht unmittelbar durch seine Projectionen, sondern durch die Spuren $\beta_1\ \beta_2\ \beta_3$, $\gamma_1\ \gamma_2\ \gamma_3$ zweier in einer Ebene E liegender, mithin sich in einem Punkte schneidender Geraden β und γ gegeben, so kann man die Spu-

angenommen werden. Die unendlich fernen Punkte, die Richtungen, der Projectionen der Geraden β geben die Projectionen des gesuchten Punktes.

Ist die gegebene Ebene A die unendlich ferne Ebene, so sind die Richtungen der Projectionen der gegebenen Geraden die Projectionen des gesuchten Punktes.

Eine wesentliche Vereinfachung erfährt die Construction, wenn die gegebene Ebene A zu einer der Projectionsebenen senkrecht ist, da in diesem Falle die entsprechende Projection jedes ihrer Punkte in ihrer gleichnamigen Spur liegen muss. Der Schnittpunkt der entsprechenden Projection der Geraden α mit dieser Spur der Ebene A gibt die entsprechende Projection des gesuchten Punktes, aus welcher die beiden andern Projectionen, die in den gleichnamigen Projectionen der Geraden α liegen müssen, leicht entwickelt werden können.

Ist die Ebene A nicht unmittelbar durch ihre Spuren, sondern durch die Projectionen $\beta'\ \beta''\ \beta'''$, $\gamma'\ \gamma''\ \gamma'''$ zweier sich in einem Punkte p schneidender, mithin in einer Ebene liegender Geraden β und γ gegeben, so kann man die Pro-

ren der durch eine Gerade α und den Schnittpunkt der Geraden $\beta\gamma$ gelegten Ebene A bestimmen, ohne die Projectionen dieses Schnittpunktes aufzusuchen. Zu diesem Zwecke bestimmt man die Ebenen B und C, welche die beiden Geraden β und γ mit dem in einer Projectionsebene, z. B. der Horizontalebene, liegenden Punkte α_1 der Geraden α verbinden. Die Horizontalspuren B_1 C_1 dieser Ebenen sind die Verbindungsgeraden der Spuren β_1 und γ_1 mit dem Punkte α_1, während die beiden andern Spuren durch β_2 und β_3, beziehungsweise durch γ_2 und γ_3 gehen müssen. Die Schnittlinie δ dieser beiden Ebenen B und C, deren Horizontalspur δ_1 mit α_1 zusammenfällt, muss durch den Schnittpunkt a der gegebenen Geraden β und γ gehen, und hat mit der gegebenen Geraden α die Horizontalspur α_1 gemeinsam. Die durch die Geraden α und δ gelegte Ebene ist daher die gesuchte Ebene A. (Fig. 34a, Taf. VI.)

Hieran schliesst sich die Aufgabe, die Verbindungsgerade zweier durch je ein Paar sich schneidender Geraden $\alpha\beta$ und $\gamma\delta$ gegebener Punkte a und b zu zeichnen, wenn die Geraden α, β, γ und δ durch ihre Spuren gegeben sind, ohne die

jectionen des in einer Geraden α und in der durch die Geraden β γ gelegten Ebene liegenden Punktes a bestimmen, ohne die Spuren dieser Verbindungsebene aufzusuchen. Zu diesem Zwecke bestimmt man die Punkte b und c, welche die Geraden β und γ mit der durch die Gerade α senkrecht zu einer, z. B. der Horizontalebene, gelegten Ebene gemeinsam haben. Die Horizontalprojectionen b' c' dieser Punkte sind die Schnittpunkte der Projectionen β' und γ' mit der Projection α', während die beiden andern Projectionen in β'' und β''', beziehungsweise in γ'' und γ''' liegen müssen. Die Verbindungslinie δ dieser beiden Punkte b und c, deren Horizontalprojection δ' mit α' zusammenfällt, muss in der durch die gegebenen Geraden β und γ gelegten Ebene A liegen, und hat mit der gegebenen Geraden α die Horizontalprojection α' gemeinsam. Der Schnittpunkt der Geraden α und δ ist daher der gesuchte Punkt a. (Fig. 34b, Taf. VI.)

Hieran schliesst sich die Aufgabe, die Schnittlinie zweier durch je ein Paar sich schneidender Geraden $\alpha\beta$ und $\gamma\delta$ gegebener Ebenen A und B zu zeichnen, wenn die Geraden α, β, γ und δ durch ihre Projectionen gegeben sind,

Projectionen dieser Punkte aufzusuchen. Man legt nach dem Frühern die Verbindungsebenen M und N des Schnittpunktes $\gamma\delta$ mit den Geraden α und β. Die Schnittlinie ξ dieser beiden Ebenen geht durch die Schnittpunkte der Geraden α und β, γ und δ, ist also die gesuchte Verbindungsgerade.

ohne die Spuren dieser Ebenen aufzusuchen. Man sucht nach dem Frühern die Schnittpunkte m und n der Verbindungsebene $\gamma\delta$ mit den Geraden α und β. Die Verbindungslinie ξ dieser beiden Punkte liegt nun in den beiden durch α und β, γ und δ gelegten Ebenen, ist also die gesuchte Schnittlinie.

4a. Sind die drei Punkte a, b und c durch ihre Projectionen gegeben, so liegt jede der drei Geraden, welche je zwei dieser Punkte verbindet, in der durch diese Punkte bestimmten Ebene; die Spuren irgend zweier dieser Verbindungsgeraden bestimmen dann nach dem Frühern die Spuren der gesuchten Ebene.

4b. Sind die drei Ebenen A, B und C durch ihre Spuren gegeben, so geht jede der drei Geraden, in welchen sich je zwei dieser Ebenen schneiden, durch den durch diese Ebenen bestimmten Punkt; die Projectionen von irgend zweien dieser Schnittlinien bestimmen dann nach dem Frühern die Projectionen des gesuchten Punktes.

In den Schnittpunkten der Horizontal- und Verticalprojectionen der Verbindungsgeraden der Punkte ab, bc und ac, die also in einer Geraden liegen müssen, erhält man die Collineationsaxe $\varkappa'''$ des ebenen Systems, dem die drei Punkte $a\,b\,c$ angehören, und dessen Träger die gesuchte Ebene ist. Ebenso ergeben die Schnittpunkte der Vertical- und Kreuzrissprojectionen dieser Verbindungsgeraden die Collineationsaxe $\varkappa''\,'''$; aus den Collineationsaxen eines ebenen Sy-

In den Verbindungslinien der Horizontal- und Verticalspuren der Schnittlinien der Ebenen AB, BC und AC, die sich also in einem Punkte schneiden müssen, erhält man das Collineationscentrum ζ_{12} des Strahlenbündels, dem die drei Ebenen $A\,B\,C$ angehören und dessen Mittelpunkt der gesuchte Punkt ist. Ebenso ergeben die Verbindungslinien der Vertical- und Kreuzrissspuren dieser Schnittgeraden das Collineationscentrum ζ_{23}; aus den Collineationscentren eines Strahlen-

stems lassen sich aber die gesuchten Spuren des Trägers leicht bestimmen. (Fig. 35a, Taf. VI.)

bündels lassen sich aber die gesuchten Projectionen des Mittelpunktes leicht bestimmen. (Fig. 35b, Taf. VI.)

Was immer für specielle Lagen die gegebenen Elemente in dieser Aufgabe haben mögen, sie lässt sich stets durch die Aufsuchung der durch zwei dieser Elemente bestimmten Geraden in Verbindung mit dem dritten gegebenen Elemente auf die vorhergehende Aufgabe zurückführen; eine nochmalige Aufzählung und Untersuchung der möglichen speciellen Fälle ist also hier vollkommen überflüssig.

§. 20. Die Aufgaben, welche zur Darstellung eines Grundgebildes der ersten Stufe (Punktreihe, Ebenenbüschel und Strahlenbüschel) führen, sind wieder, in Uebereinstimmung mit den in der Einleitung angeführten gegenseitigen Beziehungen dieser Gebilde, folgende:

1a. Eine Punktreihe ist durch die Projectionen ihres Trägers, und ein ausserhalb desselben gelegener Punkt durch seine Projectionen gegeben; es soll das Strahlenbüschel dargestellt werden, dessen Mittelpunkt der gegebene Punkt ist, und als dessen Elemente die Verbindungsgeraden der Punkte der Punktreihe mit dem gegebenen Punkte erscheinen.

1b. Ein Ebenenbüschel ist durch die Spuren seiner Axe, und eine nicht durch dieselbe gehende Ebene durch ihre Spuren gegeben; es soll das Strahlenbüschel dargestellt werden, dessen Träger die gegebene Ebene ist, und als dessen Elemente die Schnittgeraden der Ebenen des Ebenenbüschels mit der gegebenen Ebene erscheinen.

2a. Ein Strahlenbüschel ist durch die Projectionen seines Mittelpunktes und die Spuren seines Trägers gegeben, ebenso eine Gerade, die durch den Mittelpunkt desselben geht; es soll das Ebenenbüschel dargestellt werden, welches durch die Verbindungsebenen der Strahlen des Strahlenbüschels

2b. Ein Strahlenbüschel ist durch die Spuren seines Trägers und die Projectionen seines Mittelpunktes gegeben, ebenso eine Gerade, die in der Ebene derselben liegt; es soll die Punktreihe dargestellt werden, welche durch die Schnittpunkte der Strahlen des Strahlenbüschels mit der gegebenen

mit der gegebenen Geraden gebildet wird und dessen Axe die gegebene Gerade ist.

3a. Gegeben ein Strahlenbüschel und ein nicht in seinem Träger liegender Punkt; es soll das Ebenenbüschel dargestellt werden, welches durch die Verbindungsebenen der Strahlen des Strahlenbüschels mit dem gegebenen Punkte gebildet wird, und dessen Axe die Verbindungslinie des gegebenen Punktes mit dem Mittelpunkte des Strahlenbüschels ist.

4a. Gegeben eine Punktreihe und eine den Träger derselben nicht schneidende Gerade; es soll das Ebenenbüschel dargestellt werden, dessen Axe die gegebene Gerade ist, und dessen Elemente die Verbindungsebenen der Punkte der Punktreihe mit der gegebenen Geraden sind.

Geraden gebildet wird, und deren Träger die gegebene Gerade ist.

3b. Gegeben ein Strahlenbüschel und eine nicht durch seinen Mittelpunkt gehende Ebene; es soll die Punktreihe dargestellt werden, welche durch die Schnittpunkte der Strahlen des Strahlenbüschels mit der gegebenen Ebene gebildet wird, und deren Träger die Schnittlinie der gegebenen Ebene mit dem Träger des Strahlenbüschels ist.

4b. Gegeben ein Ebenenbüschel und eine die Axe desselben nicht schneidende Gerade; es soll die Punktreihe dargestellt werden, deren Träger die gegebene Gerade ist, und dessen Elemente die Schnittpunkte der Ebenen des Ebenenbüschels mit der gegebenen Geraden sind.

Die Lösungen dieser Aufgaben bestehen im Allgemeinen nur in einer wiederholten Anwendung der in den Aufgaben des vorigen Paragraphes angewendeten Methoden, und sollen daher im Folgenden nur kurz angedeutet werden.

1a. Es seien (Fig. 36a, Taf. VI) $\alpha' \alpha'' \alpha'''$ die Projectionen des Trägers der Punktreihe und $a' a'' a'''$ die Projectionen des gegebenen Punktes. Die Projectionen der Strahlen des Strahlenbüschels bilden drei projectivische Strahlenbüschel in der Zeichnungsebene, deren Mittel-

1b. Es seien (Fig. 36b, Taf. VI) $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$ die Spuren der Axe des Ebenenbüschels und $A_1 A_2 A_3$ die Spuren der gegebenen Ebene. Die Spuren der Strahlen des Strahlenbüschels bilden drei projectivische Punktreihen in der Zeichnungsebene, deren Träger die Spu-

punkte die Projectionen des Punktes a sind. Die Projectionen des einem Punkte b der Punktreihe entsprechenden Strahls β des Strahlenbüschels erhält man in den Verbindungsgeraden der Projectionen des Punktes b mit den gleichnamigen Projectionen von a. Die Schnittpunkte der Horizontal- und Vertical-, sowie der Vertical- und Kreuzrissprojectionen der Strahlen des Strahlenbüschels liegen alle in zwei Geraden $\varkappa'\,''$ und $\varkappa''\,'''$, in welchen auch die Schnittpunkte der gleichen Projectionen des Trägers α liegen, und welche die Collineationsaxen der Ebene des Strahlenbüschels sind. Aus diesen Collineationsaxen lassen sich die Spuren A_1 A_2 A_3 dieser Ebene, welche ausserdem durch die Spuren $\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3$ des Trägers der gegebenen Punktreihe gehen müssen, leicht bestimmen. In den Schnittpunkten der Projectionen der Strahlen des Büschels mit den gleichnamigen Spuren seines Trägers finden sich endlich die Spuren derselben.

2a. Es seien (Fig. 37a, Taf. VII) a' a'' a''' die Projectionen des Mittelpunktes des Strahlenbüschels und α' α'' α''' die Projectionen der durch diesen Punkt gehenden gegebenen Geraden. Bestimmt man die

ren der Ebene A sind. Die Spuren des einer Ebene B des Ebenenbüschels entsprechenden Strahls β des Strahlenbüschels erhält man in den Schnittpunkten der Spuren der Ebene B mit den gleichnamigen Spuren von A. Die Verbindungslinien der Horizontal- und Vertical-, sowie der Vertical- und Kreuzrissspuren der Strahlen des Strahlenbüschels gehen alle durch zwei Punkte ζ_{12} und ζ_{23}, durch welche auch die Verbindungslinien der gleichen Spuren des Trägers α gehen, und welche die Collineationscentren des Mittelpunktes des Strahlenbüschels sind. Aus diesen Collineationscentren lassen sich die Projectionen a' a'' a''' dieses Punktes, welche ausserdem in den Projectionen $\alpha'\,\alpha''\,\alpha'''$ der Axe des gegebenen Ebenenbüschels liegen müssen, leicht bestimmen. In den Verbindungslinien der Spuren der Strahlen des Büschels mit den gleichnamigen Projectionen seines Mittelpunktes finden sich endlich die Projectionen derselben.

2b. Es seien (Fig. 37b, Taf. VII) A_1 A_2 A_3 die Spuren des Trägers des Strahlenbüschels und α_1 α_2 α_3 die Spuren der in dieser Ebene liegenden gegebenen Geraden. Bestimmt man die Collineationsaxen $\varkappa'''$

Collineationscentren ζ_{12} und ζ_{23} des gegebenen Punktes a, so können dieselben zur Auffindung der Spuren des Trägers A des Strahlenbüschels und der Spuren $\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3$ der gegebenen Geraden α, welche beide, Ebene und Gerade, durch den Punkt a gehen sollen, benutzt werden. Die zusammengehörigen Spuren $\beta_1\ \beta_2\ \beta_3$ eines Strahls des Strahlenbüschels sind mit Hülfe dieser Collineationscentren ebenfalls leicht zu bestimmen, und in den Verbindungslinien derselben mit den Spuren der gegebenen Geraden α ergeben sich die Spuren $B_1 B_2 B_3$ der dem Strahle β entsprechenden Ebene B des gesuchten Ebenenbüschels.

3a. Bestimmt man die Verbindungslinie α des gegebenen Punktes mit dem Mittelpunkte des gegebenen Strahlenbüschels, so ist die Aufgabe vollständig auf die vorige zurückgeführt, da die Verbindungsebenen dieser Geraden α mit den Strahlen des Strahlenbüschels den gesuchten Ebenenbüschel bilden.

4a. Auch diese Aufgabe lässt sich leicht auf die vorhergehenden zurückführen. Die gegebene Punktreihe bestimmt mit irgend einem Punkte der gegebenen Geraden ein Strahlenbüschel, welches mit der

und $\varkappa''$ $'''$ der gegebenen Ebene A, so können dieselben zur Auffindung der Projectionen des Mittelpunktes a des Strahlenbüschels und der Projectionen $\alpha'\ \alpha''\ \alpha'''$ der gegebenen Geraden α, welche beide, Punkt und Gerade, in der Ebene A liegen sollen, benutzt werden. Die zusammengehörigen Projectionen $\beta'\ \beta''\ \beta'''$ eines Strahles des Strahlenbüschels sind mit Hülfe dieser Collineationsaxen ebenfalls leicht zu bestimmen, und in den Schnittpunkten derselben mit den Projectionen der gegebenen Geraden α ergeben sich die Projectionen $b'\ b''\ b'''$ des dem Strahle β entsprechenden Punktes b der gesuchten Punktreihe.

3b. Bestimmt man die Schnittlinie α der gegebenen Ebene mit dem Träger des gegebenen Strahlenbüschels, so ist die Aufgabe vollständig auf die vorige zurückgeführt, da die Schnittpunkte dieser Geraden α mit den Strahlen des Strahlenbüschels die gesuchte Punktreihe bilden.

4b. Auch diese Aufgabe lässt sich leicht auf die vorhergehenden zurückführen. Das gegebene Ebenenbüschel bestimmt mit irgend einer durch die gegebene Gerade gelegten Ebene ein Strahlenbüschel, wel-

durch seinen Mittelpunkt gehenden gegebenen Geraden das gesuchte Ebenenbüschel bestimmt.

Sind (Fig. 38a, Taf. VII) $\alpha' \alpha'' \alpha'''$ die Projectionen, $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$ die Spuren des Trägers der gegebenen Punktreihe, und $\beta_1 \beta_2 \beta_3$ die Spuren der gegebenen Geraden, so legt man durch irgend einen Punkt, z. B. den in der Horizontalebene liegenden Punkt h (β_1) der gegebenen Geraden β und den Träger der Punktreihe α eine Ebene A, deren Spuren, da h ein Punkt der Horizontalebene ist, leicht gezeichnet werden können. Die Verbinbindungsgeraden der drei Projectionen des Punktes h mit den Projectionen eines Punktes m der gegebenen Punktreihe geben die Projectionen des dem Punkte m der Punktreihe entsprechenden Strahles μ des Hülfsstrahlenbüschels. Die Schnittpunkte dieser drei Projectionen des Strahles μ mit den gleichnamigen Spuren der Ebene A dieses Strahlenbüschels sind die drei Spuren des Strahls μ (von denen die Horizontalspur mit β_1 zusammenfällt), und durch Verbindung derselben mit den gleichnamigen Spuren der Geraden β, der Axe des gesuchten Ebenenbüschels, erhält man die drei Spuren derjenigen Ebene M

ches mit der in seiner Ebene liegenden gegebenen Geraden die gesuchte Punktreihe bestimmt.

Sind (Fig. 38b, Taf. VII) $\alpha' \alpha'' \alpha'''$ die Projectionen, $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$ die Spuren der Axe des gegebenen Ebenenbüschels und $\beta' \beta'' \beta'''$ die Projectionen der gegebenen Geraden, so legt man durch die gegebene Gerade β irgend eine, z. B. die auf der Horizontalebene senkrechte Ebene H, welche die Axe des Ebenenbüschels α in einem Punkte a schneidet, dessen Projectionen, da die Ebene H senkrecht zur Horizontalebene ist, leicht gezeichnet werden können. Die Schnittpunkte der drei Spuren der Ebene H mit den Spuren einer Ebene M des gegebenen Ebenenbüschels geben die Spuren des der Ebene M des Ebenenbüschels entsprechenden Strahles μ des Hülfsstrahlenbüschels. Die Verbindungsgeraden dieser drei Spuren des Strahls μ mit den gleichnamigen Projectionen des Punktes a, des Mittelpunktes dieses Strahlenbüschels, sind die drei Projeetionen des Strahles μ (von denen die Horizontalprojection mit β' zusammenfällt), und die Schnittpunkte derselben mit den gleichnamigen Projectionen der Geraden β, des Trägers der gesuchten Punktreihe, geben die

desselben, welche dem angenommenen Punkte m der gegebenen Punktreihe entspricht.

Projectionen desjenigen Punktes m derselben, welcher der angenommenen Ebene M des gegebenen Ebenenbüschels entspricht.

§. 21. Die gegenseitigen Beziehungen zwischen den Grundgebilden zweiter Stufe: dem Strahlenbündel und dem ebenen Systeme, ergeben zur gegenseitigen Bestimmung eines derselben aus einem gegebenen andern nur die folgende Doppelaufgabe:

a. Es ist ein ebenes System gegeben und ein nicht in seiner Ebene liegender Punkt; es soll das Strahlenbündel dargestellt werden, dessen Mittelpunkt der gegebene Punkt ist, und dessen Elemente die Verbindungen der Elemente des ebenen Systems mit diesem Punkte sind; d. h. es sind zu jedem durch seine Projectionen gegebenen Elemente des ebenen Systems die Spuren seiner Verbindung mit dem gegebenen Punkte zu finden.

b. Es ist ein Strahlenbündel gegeben und eine nicht durch seinen Mittelpunkt gehende Ebene; es soll das ebene System dargestellt werden, dessen Träger die gegebene Ebene ist, und dessen Elemente die Schnitte der Elemente des Strahlenbündels mit dieser Ebene sind; d. h. es sind zu jedem durch seine Spuren gegebenen Elemente des Strahlenbündels die Projectionen seines Schnittes mit der gegebenen Ebene zu finden.

Bei diesen Aufgaben handelt es sich um die Untersuchung der gegenseitigen Beziehungen zwischen den Darstellungen eines ebenen Systems und eines Strahlenbündels, wenn das erstere ein Schnitt des letzteren ist; nur sind bei der Aufgabe a. die Elemente des ebenen Systems als gegeben zu betrachten und die zugehörigen Elemente des Strahlenbündels zu bestimmen, während bei der Aufgabe b. das Umgekehrte der Fall ist. Wie bekannt, werden die Elemente des Strahlenbündels durch die Geraden und Punkte dreier ebener Systeme in der Zeichnungsebene dargestellt, welche als die Spuren der Ebenen und Geraden des Strahlenbündels erscheinen; ebenso bilden die Projectionen der Geraden und Punkte des ebenen Systems im Raume drei ebene Systeme in der Zeichnungsebene. Da aber jedem Punkte in einem der

drei Spurensysteme des Strahlenbündels, als der Spur einer bestimmten Geraden desselben, nur ein bestimmter Punkt in jedem der drei Systeme der Projectionen des Raumsystems, nämlich die Projection des Schnittpunktes dieser Geraden des Bündels mit dem Träger des Raumsystems, entspricht; und ebenso jede Gerade der ersteren Systeme nur je eine Gerade in der letztern hat: so sind jedenfalls die Systeme I, II, III der Spuren des Strahlenbündels collinear zu den von den Projectionen des Systems im Raume gebildeten Systemen 1, 2 und 3.

Die gleichnamige Projection jeder Spur des Trägers des Raumsystems ist diese Spur selbst, welche zugleich als die entsprechende Spur der durch sie gehenden Ebene des Strahlenbündels erscheint; die drei zu den Projectionsebenen senkrechten Geraden des Strahlenbündels haben ihre Spuren in den gleichnamigen Projectionen des Mittelpunktes desselben, welche Punkte zugleich die Projectionen der Schnittpunkte dieser Strahlen mit dem Träger des Raumsystems sind.

Jedes der drei Systeme I, II, III hat also mit dem gleichnamigen der Systeme 1, 2, 3 eine Gerade, die entsprechende Spur des Trägers des Raumsystems, und alle in ihr liegenden Punkte, sowie einen Punkt, die entsprechende Projection des Mittelpunktes des Strahlenbündels, und alle durch ihn gehenden Geraden gemeinsam. Die Systeme I und 1, II und 2, III und 3 liegen daher perspectivisch; die Spuren des Trägers des Raumsystems und die Projectionen des Mittelpunktes des Strahlenbündels sind die Collineationsaxen und die Collineationscentren dieser perspectivisch collinearen Systeme. Zu jedem Punkte eines dieser Systeme könnte also der zugehörige Punkt des perspectivisch collinearen Systems leicht gefunden werden, wenn noch die Gegenaxen der beiden Systeme gegeben wären. Die Gegenaxen zweier solcher perspectivisch-collinearen Systeme, z. B. der Systeme I und 1, findet man leicht durch folgende Betrachtungen: Die unendlich ferne Gerade des Raumsystems hat auch alle ihre Projectionen in unendlicher Entfernung; die Horizontalspur jener Ebene des Bündels also, die durch die unendlich ferne Gerade des Raumsystems geht, d. h. zu dem Träger desselben parallel ist, ist die Gegenaxe im Systeme I. Die Horizontalpro-

jection der Schnittgeraden des Trägers des Raumsystems mit der zur Horizontalebene parallelen Ebene des Strahlenbündels ist die Gegenaxe des Systems 1, da die Horizontalspur dieser Ebene in unendlicher Entfernung liegt; diese beiden Gegenaxen sind wieder zur entsprechenden Collineationsaxe parallel. Auf gleiche Weise findet man die Gegenaxen in den Systemen II und 2, III und 3, die ebenfalls parallel zu den Collineationsaxen sich ergeben.

Seien also (Fig. 39, Taf. VII) a' a'' a''' die Projectionen des Mittelpunktes des Strahlenbündels, A_1 A_2 A_3 die Spuren des Trägers des ebenen Systems und m' die Horizontalprojection eines Punktes desselben; es sollen die Spuren μ_1, μ_2 und μ_3 des zugehörigen Strahls des Strahlenbündels gefunden werden. Mit Hülfe der Collineationsaxen x''' und x'''''' des ebenen Systems können die zugehörigen Projectionen m'' und m''' des Punktes m gefunden werden, ebenso, wie man aus einer etwa gefundenen Spur des Strahles μ durch die Collineationscentren ζ_{12} und ζ_{23} des Strahlenbündels die zugehörigen beiden andern Spuren finden kann.

Um nun zu irgend einer Projection des Punktes m, z. B. zu m', die gleichnamige Spur μ_1 des zugehörigen Strahls zu finden, müssen die Gegenaxen der betreffenden perspectivisch collinearen Systeme I und 1 gefunden werden. Die Gegenaxe G_1 im Systeme I, als Horizontalspur der zur gegebenen Ebene A parallelen Ebene G des Strahlenbündels, ist zur Spur A_1 parallel und hat ihre zugehörige Gerade G_2 im Systeme II, als der Verticalspur dieser Parallelebene, parallel zu A_2. Zieht man daher durch das Collineationscentrum ζ_{12} den zu A_2 parallelen Collineationsstrahl, so trifft dieser die durch a' parallel zur Axe OX gezogene Gerade, welche die den unendlich fernen Punkten im Systeme II entsprechenden Punkte des Systems I enthält, in einem Punkte, der in der gesuchten Gegenaxe G_1 liegen muss; die durch diesen Punkt parallel zu A_1 gelegte Gerade ist also die gesuchte Gegenaxe G_1. Die Gegenaxe im Systeme 1 ist, wie erwähnt, die Horizontalprojection γ' jener Geraden des Raumsystems, in welcher die durch a parallel zur Horizontalebene gelegte Ebene den Träger desselben schneidet; sie muss also zu A_1 parallel sein, während ihre Verticalprojection γ'', die γ' ent-

sprechende Gerade im Systeme 2, mit der durch a'' parallel zur Axe OX gezogenen Verticalspur dieser Parallelebene zusammenfällt. Der Schnitt dieser Geraden γ'' mit der Collineationsaxe $\varkappa'''$ gibt daher einen Punkt der gesuchten Geraden γ', durch welchen dieselbe parallel zu A_1 gezogen werden kann. Die Bestimmung entsprechender Punkte und Geraden der Systeme I und 1 geschieht nun, nachdem Collineationsaxe, Collineationscentrum und Gegenaxen gefunden sind, nach der früher gelehrten Methode. Da aber die Gegenaxen der perspectivisch-collinearen Systeme II und 2, III und 3 auf ganz analoge Weise gefunden werden können, so ist man nunmehr im Stande, zu jeder beliebigen Projection eines Punktes oder einer Geraden im Raumsystem die gleichnamige Spur der zugehörigen Geraden oder Ebene des Strahlenbündels zu finden, oder umgekehrt. Von allen Strahlen des Strahlenbündels a ist durch die Annahme der Ebene A einer bestimmt, nämlich das Perpendikel π vom Punkte a zur Ebene A. Die Projectionen π' π'' π''' dieses Perpendikels lassen sich leicht durch folgende Betrachtung bestimmen: Die durch π senkrecht zur Horizontalebene gelegte Ebene (die horizontal projicirende Ebene von π) steht auch auf der Ebene A senkrecht, da sie durch eine auf A senkrechte Gerade geht. Die Horizontalspur A_1 der Ebene A ist aber, als Schnittlinie zweier, auf dieser horizontal-projicirenden Ebene senkrechter Ebenen, zu ihr ebenfalls perpendiculär, und mithin muss die Horizontalspur dieser Ebene, d. i. die Horizontalprojection π' des Perpendikels π auf A_1 senkrecht sein. Ebenso sind die beiden andern Projectionen π'' und π''' auf den entsprechenden Spuren A_2 und A_3 der Ebene A senkrecht, während alle drei Projectionen natürlich durch die entsprechenden Projectionen des Punktes a gehen müssen. Aus den Projectionen π' π'' π''' dieses Perpendikels lassen sich die Spuren π_1 π_2 π_3 desselben leicht bestimmen, und aus diesen findet man durch die oben gegebenen Methoden die Projectionen p' p'' p''' des Fusspunktes p des Perpendikels in der Ebene A.

§. 22. Aus dem Bisherigen ergibt sich, dem allgemeinen Reciprocitätsgesetze der Geometrie entsprechend, auch eine Reciprocität der ebenen Darstellung der einander reci-

prok entsprechenden geometrischen Elemente und Gebilde im Raume; nur erscheinen hierbei, da die ebene Darstellung der Raumgebilde durch die Elemente der Zeichnungsebene geschieht, Punkt und Gerade als reciproke Elemente. Ein Raumpunkt wird durch drei Punkte, seine Projectionen, eine Raumebene durch drei Gerade, ihre Spuren, dargestellt; die Gerade, als sich selbst entsprechendes Element in den Reciprocitätsgesetzen des Raumes, zeigt die Reciprocität der ebenen Darstellung in ihrer doppelten Darstellungsweise: durch drei Punkte, ihre Spuren, oder durch drei Gerade, ihre Projectionen.

Es zeigt sich aber noch eine weitere Reciprocitätserscheinung darin, dass zu jeder speciellen Lage eines Raumpunktes gegen das Raumsystem die entsprechende Lage einer Raumebene gefunden werden kann, so dass zwischen den drei Projectionen des Punktes ähnliche Lagenbeziehungen stattfinden, wie zwischen den drei Spuren der entsprechenden Ebene. Eben dasselbe zeigt sich bei den Darstellungen specieller Lagen der Geraden, bezüglich der gegenseitigen Lagenverhältnisse ihrer Projectionen und Spuren. Solche entsprechende Gebilde ergeben sich aus der Betrachtung des Anfangspunktes der Coordinaten und der unendlich fernen Ebene als reciproker Elemente, da die drei Projectionen des erstern im Schnittpunkte der Axen, die drei Spuren der letztern in der unendlich fernen Geraden der Zeichnungsebene vereinigt erscheinen. Ebenso sind die drei Projectionsebenen den Richtungen der auf ihnen senkrechten Axen reciprok. Jedem Gebilde, das in einer dieser vier Ebenen (drei Projectionsebenen und unendlich ferne Ebene) liegt, entspricht ein reciprokes, welches durch die, diesen Ebenen reciproken Punkte geht. In den ebenen Darstellungen solcher reciproker und reciprok gelegener Gebilde erweisen sich der Schnittpunkt der Axen und die unendlich ferne Gerade, sowie jede Axe und die Richtung der andern auf ihr senkrechten Axe als reciproke Elemente; so dass die ebene Darstellung irgend eines Raumgebildes aus der Darstellung des reciproken und reciprok gelegenen durch einfache Uebertragung abgeleitet werden kann.

In den bisher entwickelten Lehrsätzen und Darstellungs-



methoden sind diese Reciprocitätsbeziehungen stets durch unmittelbare Nebeneinanderstellung der einander entsprechenden Sätze und Aufgaben hervorgehoben.

§. 23. Verzichtet man auf die Möglichkeit, die Lage der geometrischen Elemente durch Maassgrössen (Coordinaten) zu bestimmen, so kann man sich mit der Darstellung der Raumgebilde auf zwei Ebenen begnügen, da in dem Durchschnitte zweier projicirender Perpendikel ein Punkt, und in der durch zwei Spuren gelegten Ebene eine Raumebene vollkommen bestimmt ist; ebenso ist die Lage einer Geraden in dem Schnitte zweier projicirender Ebenen, oder in der Verbindungslinie zweier Spuren genügend fixirt. Diese beiden Projectionsebenen nimmt man auf einander senkrecht, die eine horizontal, die andere vertical an, und bringt die erstere durch Drehung um die gemeinsame Schnittlinie, Axe, zum Zusammenfallen mit der als Zeichnungsebene gedachten Verticalebene.

Die Gesetze der Darstellung der geometrischen Elemente und der durch sie gebildeten Grundgebilde, sowie die Beziehungen zwischen den beiden Projectionen oder Spuren solcher Gebilde, ergeben sich aus dem Früheren, sobald man sich die dritte Projectionsebene, die Kreuzrissebene, sammt den in ihr enthaltenen Bestimmungselementen, einfach weggelassen denkt.

Aber auch die im Frühern entwickelten Reciprocitätsbeziehungen zwischen den Darstellungen specieller Lagen von Punkten und Ebenen, und der doppelten Darstellungsweise von Geraden durch Projectionen und Spuren, ergeben sich gleichfalls in dem durch nur zwei Ebenen gebildeten Projectionssysteme. Nur erscheinen hier, wegen der fehlenden Markirung des Anfangspunktes durch die dritte Projectionsebene, der unendlich ferne Punkt der Axe und die unendlich ferne Ebene, die beiden Projectionsebenen und die Richtungen der zu ihnen gezogenen Perpendikel als reciproke Elemente, so dass beispielsweise eine zur Axe parallele Ebene und ein unendlich ferner Punkt eine reciproke Darstellung erfahren. In der ebenen Darstellung solcher reciprok gelegener Elemente oder Gebilde im Raume sind dann der unendlich ferne Punkt der Axe und die unendlich ferne Gerade der Zeichnungsebene,

die Axe und die Richtung der zu ihr senkrechten Geraden die einander reciprok entsprechenden Elemente. Z. B.

Liegt ein Punkt in unendlicher Entfernung, ist er ein Punkt der unendlich fernen Ebene, so sind seine Projectionen Punkte der unendlich fernen Geraden der Zeichnungsebene, d. h. zwei beliebige Richtungen in derselben.

Geht eine Ebene durch den unendlich fernen Punkt der Axe, ist sie zur Axe parallel, so gehen ihre Spuren ebenfalls durch den unendlich fernen Punkt der Axe, d. h. sind zu derselben parallel.

Oder:

Eine Gerade, welche in einer zur Axe senkrechten Ebene liegt, ist durch ihre Projectionen allein nicht bestimmt, da diese in dieselbe zur Axe senkrechte Gerade zusammenfallen. Die Spuren einer solchen Geraden liegen in einer Senkrechten zur Axe.

Eine Gerade, welche durch einen Punkt der Axe geht, ist durch ihre Spuren allein nicht bestimmt, da diese in demselben Punkte der Axe zusammenfallen. Die Projectionen einer solchen Geraden gehen durch denselben Punkt der Axe.

Die vollständige Aufzählung und Durchführung aller hierher gehörigen Reciprocitätssätze ist nach dem Vorhergehenden ohne Schwierigkeit, und kann leicht der Selbstthätigkeit des Schülers überlassen bleiben.

In den folgenden §§., welche von den Maassbestimmungen der durch Projectionen und Spuren dargestellten Raumgrössen handeln, wird immer die Darstellung derselben auf nur zwei Projectionsebenen angenommen erscheinen, da durch dieselbe die betreffenden Grössen bereits vollkommen bestimmt sind und die erhaltenen Beziehungen ganz einfach auf die dritte Projectionsebene übertragen werden können.

Maassbestimmungen.

§. 24. Zwei beliebige Punkte im Raume bestimmen eine Strecke; die zwei Strecken in den Projectionsebenen, beziehungsweise der Zeichnungsebene, welche durch die gleichbenannten Projectionen der Raumpunkte begrenzt sind, heissen die Projectionen der Strecke im Raume. Die Projectionen

von Strecken in derselben Raumgeraden liegen in den entsprechenden Projectionen dieser Geraden, und die Endpunkte dieser Streckenprojectionen sind die den Endpunkten der Raumstrecken entsprechenden Punkte der beiden projectivischen, perspectivisch gelegenen Punktreihen. Da nun die Verbindungsgeraden solcher entsprechender Punkte beider Reihen, als Perpendikel zu der betreffenden Projectionsebene, untereinander parallel sind, so müssen alle durch solche entsprechende Punkte begrenzten Strecken in beiden Geraden proportional erscheinen, d. h. gleiche Strecken einer Geraden haben zu Projectionen ebenfalls unter sich gleiche Strecken.

Das Verhältniss der Projection jeder in einer Geraden liegenden Strecke zur Strecke selbst heisst das Verkürzungs-Verhältniss q dieser Geraden; dasselbe ist von der Neigung der Geraden gegen die Projectionsebene abhängig. Ist die Gerade zur Projectionsebene parallel, so wird der Werth dieses Verhältnisses gleich 1, d. h. alle Strecken, deren Träger zu einer der Projectionsebenen parallel sind, sind mit ihren Projectionen auf diese Ebene gleich. Steht die Gerade auf der Projectionsebene senkrecht, so ist $q = 0$.

Die wahre Grösse einer durch ihre Projectionen $a'b'$, $a''b''$ (Fig. 40, Taf. VII) gegebenen Strecke ab, oder die wahre Entfernung der Punkte a und b, kann leicht dadurch bestimmt werden, dass man eine der zwei durch die Gerade ab gelegten projicirenden Ebenen, die also sowohl die Strecke im Raume als auch ihre entsprechende Projection enthält, in die Projectionsebene umlegt. Wird z. B. die horizontal projicirende Ebene umgelegt, so erscheinen die projicirenden Perpendikel der Endpunkte der Strecke als die in den Endpunkten $a'b'$ der Streckenprojection auf $a'b'$ errichteten Senkrechten, deren Längen $a'a_h$, $b'b_h$ sich als die aus der andern Projection bestimmten Abstände der Streckenendpunkte von der Horizontalebene ergeben. Diese Längen werden auf die Senkrechten in a' und b' in derselben oder in entgegengesetzten Richtungen aufgetragen, je nachdem die Endpunkte der Strecke auf derselben oder auf entgegengesetzten Seiten der Horizontalebene liegen. Die Verbindungslinie der Punkte $a_h\, b_h$ ist dann der Raumstrecke ab gleich, oder die wahre Grösse derselben.

Wird auf gleiche Weise die vertical projicirende Ebene der Strecke ab in die betreffende Projectionsebene umgelegt, so ergibt sich die Strecke $a_v b_v$ ebenfalls als die wahre Grösse der Strecke ab im Raume.

Verlängert man sowol die Projection $a'b'$ (Fig. 41, Taf. VII) der Strecke, als auch die Umlegung $a_h b_h$ derselben zu unbegrenzten Geraden, so erscheinen dieselben als die Träger zweier Puntreihen, in denen alle Punkte, wie a_h und a', b_h und b', c_h und c', ... deren Verbindungslinien auf $a'b'$ senkrecht sind, einander entsprechen. Diese Reihen sind daher projectivisch in perspectivischer Lage und haben in ihrem Durchschnittspunkte h', der zugleich der Schnittpunkt der Raumgeraden ab mit der Horizontalebene ist, zwei zusammenfallende entsprechende Punkte. Da aber die eine dieser Reihen, $a'\,b'\,c'\,...$, als die Projection derjenigen Reihe im Raume, deren Träger die Gerade ab ist, erscheint, und daher zu dieser Reihe projectivisch ist, so muss auch die Reihe $a_h\,b_h\,c_h\,...$ zur Reihe im Raume projectivisch sein. Die Punktreihe $a_h\,b_h\,c_h\,...$ wurde aber als die Umlegung der Reihe $a\,b\,c\,...$ im Raume erhalten, mithin müssen die durch entsprechende Punkte dieser beiden Reihen begrenzten Strecken gleichgross sein; zwei so beschaffene Punktreihen nennt man projectivisch gleich.

Ist eine unbegrenzte Gerade α als Träger einer Punktreihe durch ihre Projectionen $\alpha'\,\alpha''$ und durch ihre Spuren $\alpha_1\,\alpha_2$ (Fig. 41, Taf. VII) gegeben, so kann man durch Umlegen einer ihrer projicirenden Ebenen, z. B. der horizontal projicirenden Ebene, leicht die zur Raumreihe projectivisch gleiche Punktreihe erhalten. Diese Reihe hat mit der Horizontalprojection der Geraden den Punkt h' (α_1) gemeinsam, und die Umlegung eines zweiten Punktes, z. B. v (α_2), in die Horizontalebene nach v_h ergibt einen zweiten Punkt derselben. Die wahre Grösse irgend einer Strecke ab in der Geraden α erhält man dann, wenn man zu den Horizontalprojectionen $a'b'$ ihrer Endpunkte die entsprechenden Punkte $a_h b_h$ in der Reihe $h'v_h$ aufsucht. Ebenso erhält man eine zur Punktreihe im Raume projectivisch gleiche Reihe in $h_v\,v''$ durch Umlegen der vertical projicirenden Ebene der Geraden α in die Verticalebene.

Die wahre Grösse einer Strecke ab (Fig. 42, Taf. VII) kann auch gefunden werden, wenn man eine, z. B. die horizontalprojicirende Ebene derselben um eines der horizontalprojicirenden Perpendikel der Endpunkte dreht, bis sie mit der Verticalebene parallel wird; da in dieser Lage die Verticalprojection der Strecke im Raume gleich wird. Bei dieser Drehung bleibt einer der Endpunkte, z. B. a, unverändert, während der andere Punkt b einen Kreis beschreibt, dessen Ebene zur Horizontalebene parallel ist. Die Horizontalprojection dieses Kreises ist ein Kreis vom Radius $a'b'$ und dem Mittelpunkte a'; die Verticalprojection dagegen erscheint als eine zur Axe parallele Gerade. Die Horizontalprojection $a'b'_1$ der Strecke in der gedrehten Lage muss zur Axe parallel sein, woraus sich die Horizontalprojection des gedrehten Punktes b_1' bestimmt. Die Verticalprojection von b_1, b_1'' findet sich in der Verticalprojection des Kreises, und $a''b_1''$ ist die wahre Grösse der Strecke ab. Ganz auf gleiche Weise kann auch die verticalprojicirende Ebene der Strecke in eine parallele Lage zur Horizontalebene gedreht werden, woraus sich ebenfalls in $a'b_2'$ die wahre Grösse der Strecke ergibt.

Dreht man (Fig. 43, Taf. VII) die horizontalprojicirende Ebene einer unbegrenzten Geraden α, des Trägers einer Punktreihe im Raume, um das Perpendikel $v''v'$ in die Verticalebene, wobei der in der Horizontalebene liegende Punkt h' einen Kreis vom Radius $v'h'$ (Mittelpunkt v') beschreibt, und nach der Drehung in die Axe, nach h_v zu liegen kommt, so erhält man ebenfalls eine zur Raumreihe projectivisch gleiche Reihe $h_v v''$. Diese Reihe ist mit der Verticalprojection der Reihe $h''v''$ perspectivisch gelegen, da die Verbindungslinien entsprechender Punkte beider Reihen parallel zur Axe sind; der Schnittpunkt v'' beider Reihen ist sich selbst entsprechend.

Ebenso kann die verticalprojicirende Ebene der Geraden um das Perpendikel $h'h''$ in die Horizontalebene gedreht werden, wodurch sich eine zweite zur Raumreihe projectivisch gleiche zur Horizontalprojection derselben perspectivisch gelegene Punktreihe ergibt. Aus diesen so erhaltenen Punktreihen kann wieder die wahre Grösse jeder in der Geraden α gelegenen Strecke gefunden werden.

Durch die Construction dieser projectivisch gleichen Reihen ergibt sich auch die Lösung der Aufgabe: Von einem gegebenen Punkte einer Geraden aus, auf dieselbe Strecken von gegebener Länge aufzutragen.

§. 25. Zwei Gerade, die sich in einem Punkte schneiden, also auch in einer Ebene liegen, bestimmen einen Winkel; ein solcher wird daher durch die Projectionen und Spuren seiner Schenkel dargestellt. Die Schnittpunkte der Projectionen der Winkelschenkel sind die Projectionen des Winkelscheitels, während die Verbindungslinien der Spuren dieser Schenkel die Spuren der Winkelebene ergeben. Die Winkel, welche durch die Projectionen der Schenkel gebildet werden, nennt man die Projectionen des gegebenen Winkels im Raume.

Denkt man sich die Ebene des Winkels um eine ihrer Spuren in die betreffende Projectionsebene umgelegt, so werden alle Gebilde in dieser Winkelebene, folglich auch der gegebene Winkel in wahrer Grösse und Gestalt erscheinen. Die Aufgabe, die wahre Grösse eines Winkels zu bestimmen, wird also gelöst sein, sobald wir die Umlegung einer durch ihre Spuren gegebenen Ebene zu construiren im Stande sind.

Die Umlegung einer Ebene in die Projectionsebene bildet ein dem Raumsysteme congruentes ebenes System, in welchem, da die gegenseitige Lage der Punkte und Geraden in der Ebene durch das Umlegen nicht verändert wird, alle Strecken und Winkel in wahrer Grösse erscheinen. Das durch die Projectionen der Punkte und Geraden der Raumebene gebildete ebene System in der Projectionsebene ist zu dem ebenen Systeme im Raume, mithin auch zu dessen Umlegung collinear, und mit letzterem in derselben Ebene vereinigt. Da die unendlich ferne Gerade der Projectionsebene sowohl die Projection als auch die Umlegung der unendlich fernen Geraden der Raumebene ergibt, in diesen beiden collinearen Systemen also die unendlich fernen Geraden sich gegenseitig entsprechen, so sind sie affin. Die Punkte der Spur der Ebene, als Spuren aller Geraden des Raumsystems, liegen auch in den Projectionen dieser Geraden, und da sie bei dem Umlegen der Ebene ihre Lage im Raume beibehalten, so gehören sie auch den Umlegungen der Geraden an. Die einander ent-

sprechenden Geraden dieser beiden affinen ebenen Systeme, der Projection und Umlegung des Raumsystems, schneiden sich also alle in derselben Geraden, der Spur der Ebene, die beiden Systeme sind daher in perspectivischer Lage, und die Spur der Ebene erscheint als die Collineationsaxe. Das unendlich ferne Collineationscentrum, die Richtung der parallelen Collineationsstrahlen, welche die einander entsprechenden Punkte beider Systeme verbinden, wird durch folgende Betrachtung gefunden: Die Projectionen der zur Spur senkrechten Geraden, der sogenannten Falllinien der Ebene, sind nach einem bekannten stereometrischen Satze ebenfalls zur Spur senkrecht, weshalb Projection und Umlegung derselben zusammenfallen. Entsprechende Punkte der beiden Systeme liegen daher immer in derselben Senkrechten zur Spur, und die Richtung dieser Senkrechten ist das unendlich ferne Collineationscentrum der beiden perspectivisch gelegenen, affinen ebenen Systeme.

Sind so Collineationsaxe und Centrum dieser beiden Systeme bestimmt, so kann leicht zu jedem Punkte des einen Systems der entsprechende des zweiten, d. h. zu der Projection jedes Punktes der Ebene die Umlegung, und umgekehrt, bestimmt werden, sobald nur ein Paar zusammengehöriger Punkte beider Systeme festgestellt ist. Die Umlegung a_h irgend eines durch seine Projectionen $a' a''$ gegebenen Punktes der Ebene A (Fig. 44, Taf. VII) in eine der Projectionsebenen, z. B. in die Horizontalebene, fällt in das von der Projection a' zur Spur A_1 gezogenen Perpendikel (Collineationsstrahl), und die wahre Entfernung des Punktes a im Raume, folglich auch seiner Umlegung a_h, von der Spur A_1 ist die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, als dessen beide Katheten das von der Projection a' zu A_1 gefällte Perpendikel $a'm$ und das durch a gehende horizontalprojicirende Perpendikel aa', welches gleich der Entfernung der Verticalprojection a'' von der Axe ist, erscheinen.

Durch die Construction dieses rechtwinkligen Dreiecks, Drehungsdreieck genannt, wird der Abstand $a_h m$ der Umlegung von der Spur A_1, mithin diese Umlegung a_h selbst, leicht bestimmt.

Sind nun in a' und a_h ein Paar einander entsprechender

Punkte der beiden obenerwähnten ebenen Systeme (Projection und Umlegung) gegeben, so findet man ohne Schwierigkeit zur gegebenen Projection b' irgend eines andern Punktes der Ebene die zugehörige Umlegung b_h; denn 1. muss sie in dem von b' zur Spur A_1 gezogenen Perpendikel liegen und 2. müssen sich die durch a' und b', a_h und b_h gehenden, einander entsprechenden Geraden beider Systeme in der Collineationsaxe, der Spur A_1, schneiden. Auf gleiche Weise findet man die Projection c' eines Punktes der Ebene, dessen Umlegung c_h gegeben ist. Die Auffindung der Umlegung b_h bei gegebener Projection b', oder der Projection c' wenn c_h gegeben ist, kann aber auf gleiche Weise wie bei dem Punkte a durch Construction der betreffenden Drehungsdreiecke erfolgen, welch letztere, wegen der gleichen Neigung aller Falllinien einer Ebene gegen die Projectionsebene, zu einander ähnlich sein müssen. Soll die Umlegung der Ebene in die Verticalebene geschehen, so bleibt das Verfahren genau dasselbe, nur dass jetzt die Verticalspur A_2 als Collineationsaxe, und die Richtung der zu ihr Senkrechten als Collineationscentrum erscheinen. Ebenso sind in diesem Falle die Katheten des Drehungsdreiecks durch das von a'' zur Verticalspur A_2 gefällte Perpendikel und durch das verticalprojicirende Perpendikel aa'' des Punktes a gebildet.

Steht die Ebene auf der Projectionsebene senkrecht, so liegen die entsprechenden Projectionen aller Punkte und Geraden derselben in der Spur; das durch die Projectionen der Geraden und Punkte einer solchen Ebene gebildete ebene System reducirt sich auf eine Gerade, die Spur der Ebene. Bei der Umlegung der Ebene kommt wieder die Umlegung jedes Punktes derselben mit seiner Projection in dieselbe Senkrechte zur Spur. Da aber die Falllinien einer solchen Ebene zur Projectionsebene senkrecht sind, wird die eine Kathete des Drehungsdreiecks eines jeden Punktes der Ebene gleich 0, die Hypotenuse desselben, d. i. die wahre Entfernung der Umlegung von der Spur, wird daher gleich der zweiten Kathete, der Entfernung des betreffenden Punktes von der Projectionsebene. Ist die Ebene zu einer Projectionsebene parallel, so ist das durch die entsprechende Projection des ebenen Systems im Raume gebildete System dem Raumsysteme



congruent; alle Strecken und Winkel erscheinen also in der betreffenden Projection in wahrer Grösse.

Ist eine Ebene A durch ihre Spuren $A_1 A_2 A_3$ (Fig. 45, Taf. VII) in drei Projectionsebenen gegeben, so bilden diese Spuren ein Dreieck in der Ebene A, dessen Eckpunkte $A_x A_y A_z$ die Schnittpunkte der Ebene mit den drei Axen sind, und als dessen Seiten die zwischen den Axen liegenden Strecken in den drei Spuren erscheinen. Bei der Umlegung dieses Spurendreiecks in eine der Projectionsebenen, z. B. die Horizontalebene, bleibt die Horizontalspur A_1 mit den beiden Eckpunkten A_x und A_y des Dreiecks unverändert, während der dritte Eckpunkt A_z in die Horizontalebene nach $A_{z'}$ zu liegen kommt. Die Umlegung $A_{z'}$ dieses Punktes kann leicht durch die Construction des Spurendreiecks aus den bekannten Seitenlängen an die unveränderte Seite $A_x A_y$ gefunden werden, und da die Horizontalprojection des Punktes A_z im Axenschnittpunkte liegt, so hat man in diesem Punkte und dem Punkte $A_{z'}$ wieder ein Paar zusammengehöriger Punkte der beiden durch Projection und Umlegung gebildeten collinearen Systeme, aus welchen nach Obigem alle beliebigen Paare zusammengehöriger Punkte beider Systeme abgeleitet werden können. Bei der Umlegung der Ebene in die Vertical- oder Kreuzrissebene bleibt die Vertical- oder Kreuzrissspur der Ebene mit den Eckpunkten $A_x A_z$, beziehungsweise $A_y A_z$ des Spurendreiecks unverändert; die dritten Eckpunkte der an diese ungeänderten Seiten construirten Spurendreiecke geben dann wieder mit dem Schnittpunkte der Axen die entsprechenden Punktepaare für beide Umlegungen.

Die wahre Grösse eines durch die Projectionen und Spuren seiner Schenkel gegebenen Winkels kann jetzt leicht durch die Umlegung der Winkelebene gefunden werden. Hierbei braucht man nur die Umlegung des Winkelscheitels zu bestimmen, da diese, mit den unverändert gebliebenen Spuren der Schenkel verbunden, die wahre Grösse des Winkels ergibt.

§. 26. Zwei sich schneidende Ebenen bestimmen einen Flächenwinkel oder Keil; derselbe wird also durch die Spuren seiner Seitenebenen dargestellt. Diese Spuren bilden zwei ebene Winkel in den Projectionsebenen, welche die Spur-

winkel des gegebenen Keils genannt werden; die Spuren der Kante des Keils, d. i. der Schnittlinie seiner beiden Seitenebenen, sind die Scheitel dieser Spurwinkel. Schneidet man den Keil durch eine zu seiner Kante senkrechte Ebene, so schliessen die Schnittlinien dieser Ebene und der Seitenebenen des Keils mit einander einen Winkel ein, der der Neigungswinkel des Keils oder seiner beiden Ebenen genannt wird und mit dem Keile gleiches Drehungsmaass besitzt.

Der Neigungswinkel zweier Ebenen kann nun leicht bestimmt werden. Sind (Fig. 46, Taf. VIII) $A_1 A_2$ und $B_1 B_2$ die Spuren der beiden gegebenen Ebenen, so findet man zunächst in den Schnittpunkten der beiden Spurenpaare $A_1 B_1$ und $A_2 B_2$ die Spuren α_1 und α_2 und aus diesen die Projectionen α' und α'' der Schnittlinie der beiden Ebenen. Die Neigungswinkelebene C steht auf dieser Schnittlinie α senkrecht, daher sind die Spuren C_1 und C_2 dieser Ebene auf den Projectionen α' und α'' ebenfalls senkrecht. Nimmt man diese Spuren C_1 und C_2 in dieser Weise an, und bestimmt die Schnittlinien β und γ der Ebene C mit den beiden gegebenen Ebenen A und B, so schneiden sich diese Linien in einem Punkte a der Geraden α, dem Durchschnittspunkte derselben mit der Ebene C, und schliessen den gesuchten Neigungswinkel ein. Die wahre Grösse desselben erhält man aus den gefundenen Projectionen durch Umlegen der Ebene C in eine der Projectionsebenen, z. B. die Verticalebene.

Die Auffindung der beiden Schenkel β und γ des Neigungswinkels wird bedeutend erleichtert, wenn man die Neigungswinkelebene C durch einen bestimmten, früher angenommenen Punkt a der Schnittlinie α der beiden gegebenen Ebenen legt. In diesem Falle braucht man von den beiden Schnittlinien β und γ nur noch je einen Punkt zu bestimmen, da der angenommene Punkt a als Scheitel des Neigungswinkels beiden Schnittlinien angehört. Durch die Annahme des Punktes a ist jetzt die Lage der Neigungswinkelebene C vollkommen bestimmt, da in den bekannten Richtungen ihrer Spuren, senkrecht zu den Projectionen der Schnittlinie α, noch zwei weitere in den Projectionsebenen gelegene, unendlich ferne Punkte gegeben sind, durch welche sie gehen muss. Die ebenfalls unendlich ferne Verbindungslinie dieser beiden Rich-

tungen gibt die Stellung der Neigungswinkelebene, welche also durch die Bedingung, dass die Ebene auf einer gegebenen Geraden, nämlich auf der Schnittlinie α, senkrecht sein soll, vollkommen bestimmt erscheint. Um jetzt die Spuren C_1 und C_2 der Ebene C zu finden, verbindet man den angenommenen Punkt a (Fig. 47, Taf. VIII) mit der bekannten Richtung einer der beiden Spuren z. B. der Horizontalspur, durch eine Gerade δ, deren Horizontalprojection δ' daher auf der Projection α' der Schnittlinie senkrecht ist, während die Verticalprojection δ'' zur Axe parallel erscheint. Die Verticalspur δ_2 dieser Geraden gibt einen Punkt der Spur C_2, aus welchem mit Hülfe der bekannten Richtungen die Spuren C_2 und C_1 der Neigungswinkelebene leicht gezeichnet werden können. Zur Auffindung der Projectionen $\beta' \beta''$, $\gamma' \gamma''$ der Schenkel des Neigungswinkels genügt jetzt je eine Spur derselben, da sie auch durch die Projectionen a' und a'' des gegebenen Punktes a gehen müssen. Die Umlegung der Neigungswinkelebene in eine der Projectionsebenen gibt wieder die wahre Grösse des Neigungswinkels.

Stehen beide Ebenen auf derselben Projectionsebene senkrecht, so ist auch ihre Schnittlinie auf dieser Ebene senkrecht, und dieselbe erscheint dann als die Neigungswinkelebene des Keils. Der Winkel also, den die Spuren der beiden Ebenen in dieser Projectionsebene einschliessen, ist daher zugleich die wahre Grösse ihres Neigungungswinkels.

Soll der Neigungswinkel einer Ebene A (Fig. 48, Taf. VIII) mit einer Projectionsebene, z. B. der Horizontalebene, bestimmt werden, so geschieht dies auf ganz gleiche Weise. Als Schnittlinie der beiden Ebenen erscheint jetzt die Horizontalspur A_1 der gegebenen Ebene, und die auf ihr senkrechte Neigungswinkelebene C ist daher horizontalprojicirend. Die Horizontalspur C_1 derselben ist auf der Horizontalspur A_1 der gegebenen Ebene senkrecht, während die Verticalspur C_2 senkrecht zur Axe ist. Die Schnittlinie α der Neigungswinkelebene C mit der gegebenen Ebene A und die Horizontalspur C_1 der ersteren bilden die Schenkel des Neigungswinkels μ, welcher wieder durch Umlegen der Ebene C um die Spur C_1 oder C_2 in wahrer Grösse erhalten wird. Auf gleiche Weise findet man den Neigungswinkel ν der Ebene

A mit der Verticalebene, dessen Ebene D auf der Verticalspur A_2 senkrecht ist, und dessen Schenkel die Verticalspur D_2 dieser Neigungswinkelebene und deren Schnittlinie β mit der Ebene A bilden.

§. 27. Ein Punkt a und eine nicht durch ihn gehende Gerade α bestimmen eine Strecke, nämlich die Länge des von a auf α gefällten Perpendikels, welche der Abstand des Punktes von der Geraden genannt wird. Es ist dies zugleich auch die kürzeste aller Strecken, welche den gegebenen Punkt mit den einzelnen Punkten der gegebenen Geraden verbinden.

Sind (Fig. 49, Taf. VIII) $a' a''$ die Projectionen des gegebenen Punktes, $\alpha' \alpha''$ und $\alpha_1 \alpha_2$ die Projectionen und Spuren der gegebenen Geraden, so werden die Projectionen des von a auf die Gerade α gefällten Perpendikels π im Allgemeinen auf den Projectionen von α nicht senkrecht sein. Da aber π in der durch α und a bestimmten Ebene A liegt, so wird nach der Umlegung dieser Ebene in eine der Projectionsebenen, z. B. die Horizontalebene, die Umlegung π_h des Perpendikels π auf der Umlegung α_h der Geraden α senkrecht, und zugleich als wahre Grösse des gesuchten Abstandes erscheinen. Da die Senkrechte π_h ausserdem durch die Umlegung a_h des Punktes a gehen muss, kann sie leicht gezogen und daraus auch die Projectionen π' und π'' des Perpendikels π gefunden werden. Um nun zunächst die Spuren der durch a und α gelegten Ebene A zu bestimmen, verbindet man den Punkt a mit irgend einem, am besten dem unendlich fernen Punkte der Geraden α; die Projectionen γ' und γ'' dieser Verbindungsgeraden γ sind also zu den Projectionen der gegebenen Geraden α parallel. Die Geraden, welche die Spuren $\gamma_1 \gamma_2$ dieser Geraden mit den gleichnamigen Spuren der Geraden α verbinden, sind die gesuchten Spuren A_1 und A_2 der Ebene A.

Bestimmt man dann die Umlegung a_h des gegebenen Punktes a der Ebene A in die Horizontalebene, nach §. 25 mit Hülfe des Drehungsdreiecks, so ist durch diesen Punkt und die unverändert gebliebene Horizontalspur γ_1 die Umlegung γ_h der Geraden γ gegeben. Die Umlegung α_h der Geraden α geht dann durch die Spur α_1 und erscheint zu γ_h parallel. Fällt man nun von dem Punkte a_h zur Geraden

α_h das Perpendikel π_h, welches dieselbe im Punkte b_h schneidet, so ist $a_h b_h$ die Umlegung, mithin auch die wahre Grösse des gesuchten Abstandes des Punktes a von der Geraden α. Um die Projectionen dieser Strecke zu erhalten, bestimmt man auf bekannte Weise aus der Umlegung b_h die in α' liegende Horizontalprojection b', und aus dieser die Verticalprojection b'' des Punktes b; $a'b'$ und $a''b''$ sind dann die Projectionen des gesuchten Abstandes.

Den Punkt b, in welchem das vom Punkte a zur Geraden α gezogene Perpendikel π dieselbe trifft, findet man auch als den Durchstosspunkt der Geraden α mit der durch a senkrecht zu α gelegten Ebene P, deren Spuren P_1 und P_2 daher auf den Projectionen α' und α'' senkrecht sein müssen. Legt man durch a (Fig. 50, Taf. VIII) eine Gerade β, parallel zur Spur P_2, deren Verticalprojection β'' also senkrecht zu α'' und deren Horizontalprojection β' parallel zur Axe ist, so ergibt, wie bekannt, die Horizontalspur β_1 dieser Geraden einen Punkt der Spur P_1 der Ebene P, und können P_1 und P_2 dann leicht gezogen werden. Bestimmt man dann die Projectionen b' und b'' des Durchschnittspunktes der Geraden α mit der Ebene P auf bekannte Weise, indem man durch α die verticalprojicirende Ebene $V_1 V_2$ legt, und ihre Schnittlinie γ mit der Ebene P aufsucht, so sind $a'b'$ und $a''b''$ die Projectionen des gesuchten Abstandes. Durch Umlegung einer der projicirenden Ebenen der Strecke ab ergibt sich nach §. 24 in $a_h b_h$ oder $a_v b_v$ die wahre Grösse desselben.

Nimmt man in einer von zwei gegebenen parallelen Geraden α und β einen Punkt a an, und sucht nach einer der oben gegebenen Methoden den Abstand dieses Punktes a von der andern Geraden, so ist dies zugleich der Abstand der beiden parallelen Geraden selbst. Hierbei ist die durch den Punkt und die eine der beiden Parallelen gelegte Ebene zugleich die Ebene der beiden Geraden, und die durch den Punkt auf die Gerade gelegte senkrechte Ebene ist auf beiden Geraden senkrecht.

Legt man also die durch α und β gehende Ebene A in eine der Projectionsebenen um, und bestimmt den senkrechten Abstand der ebenfalls parallelen Umlegungen der Geraden α und β; oder legt man eine auf α und β senkrechte Ebene P und

bestimmt die Punkte a und b, in welchen die Geraden α und β diese Ebene P schneiden, so hat man zwei Lösungen dieser Aufgabe, welche von der Annahme eines bestimmten Punktes in einer der beiden Geraden unabhängig sind.

§. 28. Eine Ebene A und eine nicht in ihr liegende Gerade α bestimmen einen Winkel, nämlich den Neigungswinkel der Geraden mit der Ebene. Es ist dies derjenige Winkel, welchen die Gerade mit ihrer Projection auf der gegebenen Ebene einschliesst, und zugleich der kleinste aller Winkel, welche die Gerade mit den durch ihren Schnittpunkt in der Ebene gezogenen Geraden bildet.

Der Durchschnittspunkt d der Geraden α mit der Ebene A ist ein Punkt der Projection dieser Geraden auf der Ebene; fällt man dann von irgend einem Punkte a der Geraden auf die Ebene A das Perpendikel π, so ergibt der Fusspunkt b dieses Perpendikels einen zweiten Punkt der gesuchten Projection. Die in der Ebene A liegende Verbindungsgerade δ der Punkte d und b ist dann diese Projection, und der Winkel der Geraden α und δ der gesuchte Neigungswinkel.

Da aber das Perpendikel π auf jeder durch seinen Fusspunkt b in der Ebene A gezogenen Geraden, mithin auch auf δ senkrecht steht, so schliessen die Geraden π und α einen zum Winkel der Geraden δ und α, d. h. zum gesuchten Neigungswinkel complementären Winkel ein.

Fällt man also von einem willkürlich gewählten Punkte a der Geraden α (Fig. 51, Taf. VIII) das Perpendikel π zur Ebene A, (dessen Projectionen $\pi'\pi''$ auf den Spuren $A_1 A_2$ der Ebene A senkrecht sind), so hat man nur nach §. 25 den Winkel der Geraden π und α durch Umlegen seiner Ebene B zu bestimmen, um in dem zu diesem gefundenen complementären Winkel den gesuchten Neigungswinkel zu erhalten.

§. 29. Eine Ebene A und ein Punkt a bestimmen eine Strecke, nämlich die Länge des vom Punkte zur Ebene gefällten Perpendikels. Es ist die kürzeste aller Strecken, welche den gegebenen Punkt mit den einzelnen Punkten der Ebene verbinden; sie wird der Abstand des Punktes von der Ebene genannt.

Die Bestimmung dieses Abstandes geschieht leicht, indem

man durch den Punkt a (Fig. 52, Taf. VIII) das Perpendikel π zur Ebene zieht, dessen Projectionen, wie bekannt, auf den Spuren der Ebene senkrecht sind. Der Durchschnittspunkt b dieses Perpendikels mit der Ebene bestimmt den zweiten Endpunkt der Strecke, aus deren Projectionen die wahre Grösse gefunden werden kann.

Nimmt man in einer von zwei zu einander parallen Ebenen A und B, deren Spuren also ebenfalls parallel sind, einen Punkt a an und bestimmt den Abstand dieses Punktes von der zweiten Ebene, so ist dies zugleich der Abstand der beiden Parallelebenen. Da aber dieses durch den Punkt a gezogene Perpendikel zugleich auf beiden Ebenen senkrecht steht, so erhält man auch den Abstand zweier Parallelebenen, wenn man irgend eine Gerade π senkrecht auf beide Ebenen legt, und die Durchschnittspunkte a und b dieser Geraden mit den gegebenen Ebenen bestimmt. Die Strecke ab gibt dann den gesuchten Abstand.

§. 30. Zwei Gerade α und β, welche nicht in einer Ebene liegen, also auch keinen Punkt gemeinsam haben, nennt man sich kreuzende Gerade. Legt man durch jede der beiden Geraden und den unendlich fernen Punkt, die Richtung, der andern je eine Ebene, so erhält man zwei Ebenen A und B, welche, da sie zwei unendlich ferne Punkte, die Richtungen der beiden Geraden, gemeinsam enthalten, durch dieselbe unendlich ferne Gerade, die Verbindungslinie dieser beiden Richtungen, gehen, d. h. zu einander parallel sein müssen. Zwei sich kreuzende Geraden bestimmen daher ein Paar paralleler Ebenen, einen Parallelraum.

Errichtet man in irgend einem Punkte m der einen Geraden α ein Perpendikel π auf die durch diese Gerade gehende Ebene A des Parallelebenenpaares, so steht dasselbe auch senkrecht auf der zweiten Ebene B dieses Paares. Verschiebt man nun dieses Perpendikel π parallel zu sich selbst längs der Geraden α so lange, bis sein Fusspunkt in der Ebene B die in derselben liegende Gerade β trifft, so wird das Perpendikel in dieser Stellung beide gegebenen Geraden α und β in den Punkten a und b schneiden und auf beiden senkrecht sein. Die Strecke ab ist zugleich die kürzeste von allen, welche irgend zwei beliebige Punkte der Geraden α und β

verbinden, und heisst der Abstand der beiden sich kreuzenden Geraden.

Sind also (Fig. 53, Taf. IX) die Geraden α und β durch ihre Projectionen $\alpha'\alpha''$, $\beta'\beta''$ und ihre Spuren $\alpha_1\alpha_2$, $\beta_1\beta_2$ gegeben, und soll der Abstand derselben gefunden werden, so muss man zunächst die Spuren A_1 und A_2 der durch α gelegten Ebene A des Parallelebenenpaares bestimmen. Zu diesem Zwecke legt man durch irgend einen Punkt der Geraden α, am besten durch eine der Spuren z. B. α_1 (h) eine Gerade γ parallel zur zweiten gegebenen Geraden β. Die Projectionen $\gamma'\gamma''$ dieser Geraden sind zu β' und β'' parallel; die Horizontalspur γ_1 fällt mit α_1 zusammen, und die Verticalspur γ_2 bestimmt mit α_2 die Verticalspur A_2 der gesuchten Ebene, deren Horizontalspur A_1 durch α_1 gehen muss.

Fällt man nun von irgend einem Punkte m der Geraden β das Perpendikel π zur Ebene A, und sucht den Durchschnittspunkt n desselben mit dieser Ebene; so liegen in der durch n parallel zu β gezogenen Geraden δ die Fusspunkte aller von den Punkten der Geraden β zur Ebene A gezogenen Perpendikel. Diese Gerade δ schneidet die gegebene Gerade α, mit der sie in derselben Ebene A liegt, in einem Punkte a, und das in diesem Punkte zur Ebene A errichtete Perpendikel trifft die Gerade β in einem Punkte b; ab ist dann der gesuchte Abstand, dessen wahre Grösse wieder aus den gefundenen Projectionen $a'b'$ und $a''b''$ bestimmt werden kann.

Sind die Geraden α und β nur durch ihre Spuren $\alpha_1\alpha_2$, $\beta_1\beta_2$ (Fig. 54, Taf. IX) gegeben, so können die Spuren A_1A_2, B_1B_2 der Ebenen des Parallelebenenpaares leicht gefunden werden, ohne die Projectionen der Geraden aufzusuchen. Es handelt sich in diesem Falle nur um die Aufsuchung der Spur γ_2 der durch den Punkt α_1 parallel zu β gelegten Geraden γ, deren Horizontalspur γ_1 mit α_1 zusammenfällt. Da diese Gerade durch den Punkt α_1 geht und parallel zu β ist, so liegt sie jedenfalls in der durch β und den Punkt α_1 gelegten Ebene C, deren Spuren C_1 und C_2 leicht gezogen werden können, und weil sie zu β parallel ist, muss die Verbindungslinie der Spuren γ_1 (α_1) und γ_2 zur Linie $\beta_1\beta_2$ parallel sein. Ist auf diese Weise γ_2 gefunden, so gibt die Verbindungslinie der

Spuren α_2 und γ_2 die Verticalspur A_2 der einen Ebene, deren Horizontalspur durch α_1 gehen muss. Die durch β_1 und β_2 parallel zu A_1 und A_2 gelegten Geraden B_1 und B_2 sind dann die Spuren der zweiten Ebene B des Parallelebenenpaares.

Die Annahme zweier sich kreuzender Geraden ergibt noch folgende Lagenbeziehungen:

Durch zwei sich kreuzende Gerade α und β und durch einen nicht in ihnen liegenden Punkt a ist eine Gerade γ bestimmt; nämlich die Schnittlinie der beiden Verbindungsebenen A und B des Punktes a mit den beiden Geraden α und β. Diese Gerade γ geht durch den Punkt a und schneidet die Geraden α und β in zwei Punkten b und c.

Sind (Fig. 55a, Taf. IX) $\alpha'\alpha''$ und $\beta'\beta''$ die Projectionen und $\alpha_1\alpha_2$, $\beta_1\beta_2$ die Spuren der gegebenen Geraden, $a'a''$ die Projectionen des gegebenen Punktes, so findet man zunächst die Spuren der Verbindungsebenen A und B, wenn man in jeder der Geraden α und β einen Punkt, am besten eine der Spuren, z. B. die Horizontalspuren α_1 und β_1, annimmt, und die Verbindungsgeraden δ und ε dieser Punkte mit dem Punkte a bestimmt. Die Verticalspuren δ_2 und ε_2 dieser Geraden (die Horizontalspuren fallen mit α_1 und β_1 zusammen) bestimmen mit den Spuren α_2 und β_2 der gegebenen Geraden die Verticalspuren A_2B_2 der

Durch zwei sich kreuzende Gerade α und β und durch eine nicht durch sie gehende Ebene A ist eine Gerade γ bestimmt; nämlich die Verbindungslinie der beiden Durchschnittspunkte a und b der Ebene A mit den beiden Geraden α und β. Diese Gerade γ liegt in der Ebene A und liegt mit den Geraden α und β in zwei Ebenen B und C.

Sind (Fig. 55b, Taf. IX) $\alpha'\alpha''$ und $\beta'\beta''$ die Projectionen und $\alpha_1\alpha_2$, $\beta_1\beta_2$ die Spuren der gegebenen Geraden, A_1A_2 die Spuren der gegebenen Ebene, so findet man zunächst die Projectionen der Durchschnittspunkte a und b, wenn man durch jede der beiden Geraden α und β eine Ebene, am besten eine projicirende Ebene, z. B. die horizontalprojicirenden Ebenen H und M, legt, und die Schnittlinien δ und ε dieser Ebenen mit der Ebene A bestimmt. Die Verticalprojectionen δ'' und ε'' dieser Geraden (die Horizontalprojectionen fallen mit α' und β' zusammen) bestimmen mit den Projectionen

gesuchten Verbindungsebenen A und B, deren Horizontalspuren durch α_1 und β_1 gehen müssen. In den Schnittpunkten der Spuren $A_1 B_1$, $A_2 B_2$ finden sich die Spuren γ_1 und γ_2 der gesuchten Geraden, aus denen man leicht die Projectionen $\gamma' \gamma''$ derselben bestimmen kann. Diese Gerade γ schneidet die gegebenen Geraden α und β in zwei Punkten b und c, deren Projectionen b' und b'', c' und c'' also in demselben Perpendikel zur Axe liegen müssen.

α'' und β'' der gegebenen Geraden die Verticalprojectionen a'' und b'' der gesuchten Schnittpunkte a und b, deren Horizontalprojectionen in α' und β' liegen müssen. In den Verbindungslinien der Projectionen $a'b'$, $a''b''$ finden sich die Projectionen γ' und γ'' der gesuchten Geraden, aus denen man leicht die Spuren $\gamma_1 \gamma_2$ derselben bestimmen kann. Diese Gerade γ liegt mit den gegebenen Geraden α und β in zwei Ebenen B und C, deren Spuren B_1 und B_2, C_1 und C_2 sich also in demselben Punkte der Axe schneiden müssen.

Mit Hülfe dieser Beziehungen ist man im Stande, den Abstand zweier sich kreuzender Geraden α und β noch auf einem andern Wege zu finden. Bestimmt man nämlich die Richtung der auf beiden gegebenen Geraden, also auch auf den Ebenen des Parallelebenenpaares, senkrechten Geraden und legt durch diesen (unendlich fernen) Punkt a nach obiger Construction die Gerade, welche die beiden gegebenen Geraden in den Punkten b und c schneidet, so ist die Strecke bc der gesuchte Abstand. Um die Richtung der erwähnten Senkrechten auch ohne Aufsuchung der Spuren des Parallelebenenpaares zu finden, dient folgende Betrachtung: Die Stellung der zu einer der gegebenen Geraden α senkrechten Ebenen enthält die Richtungen aller auf α senkrechten Geraden, und ebenso sind in der Stellung der zu β senkrechten Ebenen die Richtungen der Senkrechten auf diese Gerade enthalten; die diesen beiden Stellungen gemeinsame Richtung wird also die gesuchte Richtung der auf α und β senkrechten Geraden sein. Legt man daher irgend zwei auf α und β senkrechte Ebenen P und Q, so ist die Richtung ihrer Schnittlinie μ der unendlich ferne Punkt a, die Richtung, der erwähnten Senkrechten.

Die Lösung der Aufgabe, die durch diese Richtung a gehende, α und β schneidende Gerade aufzusuchen, geschieht genau so wie oben, nur dass die Verbindungsgeraden δ und ε der Punkte α_1 und β_1 mit dem unendlich fernen Punkte a, zu sich selbst und zur gefundenen Schnittgeraden μ der Ebenen P und Q parallel erscheinen müssen. Legt man die senkrechten Ebenen P und Q so, dass sie durch eine Spur, z. B. α_1, gehen, so ist ihre Schnittlinie δ, zugleich die Verbindungslinie dieser Spur α_1 mit dem unendlich fernen Punkte a, der Richtung der gesuchten Senkrechten. (Fig. 56, Taf. IX.)

B. Centralprojection.

Darstellung der geometrischen Elemente und der Grundgebilde erster und zweiter Stufe.

§. 31. Da durch Projection und Spur in Beziehung auf nur eine Projectionsebene die vollständige Bestimmung der geometrischen Elemente nicht möglich ist, so wurden bisher eine zweite und dritte Projectionsebene in gegenseitig fest bestimmter Lage angenommen und die darzustellenden Raumformen durch Projection und Spur auch auf diese Ebenen bezogen und so die vollständige Lagenbestimmung derselben erreicht.

Derselbe Zweck wird in der Centralprojection, bei Annahme nur einer Projectionsebene, dadurch erreicht, dass man ausserhalb derselben noch einen Punkt C, das Projectionscentrum, als Mittelpunkt, eines Strahlenbündels annimmt. Um die Lage des Projectionscentrums gegen die Projectionsebene festzustellen, fällt man von demselben zur Ebene ein Perpendikel, welches Hauptstrahl genannt wird. Der Fusspunkt C' dieses Perpendikels in der Projectionsebene, und der Abstand des Projectionscentrums (Distanz) bestimmen die Lage desselben vollkommen.

Der Kreis, welcher in der Projectionsebene aus dem

Punkte C' mit der Distanz als Halbmesser beschrieben wird, heisst Distanzkreis, und sein Mittelpunkt Hauptpunkt. Hauptpunkt und Distanzkreis bestimmen also gleichfalls die Lage des Projectionscentrums. Ebenso ist auch die Lage der durch das Centrum zur Projectionsebene parallel gelegten Ebene bestimmt, welche die Gegenebene genannt wird.

§. 32. Die Verbindungsgerade irgend eines Raumpunktes a mit dem angenommenen Projectionscentrum, (Projectionsstrahl), bestimmt in der Projectionsebene einen Punkt, welcher die Centralprojection des betreffenden Raumpunktes genannt wird.

Durch diese Projection ist aber die Lage des Raumpunktes nicht vollständig bestimmt. Alle Punkte der Punktreihe, deren Träger der betreffende Projectionsstrahl ist, haben dieselbe Projection. Von allen Punkten dieser Reihe sind nur zwei, nämlich der Punkt in der Projectionsebene und der unendlich ferne Punkt, die Richtung des Strahls, bestimmt. Alle Punkte der Projectionsebene, sowie die Punkte der unendlich fernen Ebene sind daher durch ihre Centralprojection allein bestimmt.

Jeder Punkt in der Projectionsebene bestimmt also die Lage zweier Punkte im Raume, nämlich den Punkt in der Pro-

Die Schnittlinie irgend einer Raumebene A mit der Projectionsebene gibt eine Gerade in der Projectionsebene, welche die Spur oder die Schnittlinie der betreffenden Raumebene genannt wird.

Durch diese Spur ist aber die Lage der Raumebene nicht vollständig bestimmt. Alle Ebenen des Ebenenbüschels, dessen Axe die betreffende Schnittlinie ist, haben dieselbe Spur. Von allen Ebenen dieses Büschels sind nur zwei, nämlich die durch das Projectionscentrum gehende und die zur Projectionsebene senkrechte Ebene bestimmt. Alle durch das Projectionscentrum gehenden, sowie die zur Projectionsebene senkrechten Ebenen sind daher durch ihre Spur in der Projectionsebene allein bestimmt.

Jede Gerade in der Projectionsebene bestimmt also zwei durch sie gehende Ebenen, nämlich die Verbindungsebene mit

jectionsebene selbst, und den unendlich fernen Punkt des durch ihn gehenden Projectionsstrahls. Durch passend gewählte Bezeichnungen können diese beiden Arten von Punkten von einander unterschieden werden.

dem Projectionscentrum und die zur Projectionsebene senkrechte Ebene. Durch passend gewählte Bezeichnungen können die beiden Arten von Ebenen von einander unterschieden werden.

§. 33. Die Verbindungsebene irgend einer Geraden im Raume mit dem Projectionscentrum, die projicirende Ebene der Geraden genannt, bestimmt eine Gerade in der Projectionsebene, welche die Centralprojection der Raumgeraden genannt wird. Durch diese Projection ist aber die Gerade im Raume nicht vollständig bestimmt; alle Geraden des ebenen Systems, dessen Träger diese projicirende Ebene ist, haben dieselbe Projection. Von allen Geraden dieses ebenen Systems sind nur zwei, nämlich die Gerade in der Projectionsebene, und die unendlich ferne Gerade, die Stellung, der projicirenden Ebene bestimmt. Alle Geraden in der Projectionsebene, sowie die Geraden in der unendlich fernen Ebene sind daher durch ihre Centralprojection allein bestimmt. Jede Gerade in der Projectionsebene bestimmt also auch die Lage zweier Raumgeraden, nämlich die Gerade in der Projectionsebene selbst, und die unend-

Der Schnittpunkt irgend einer Geraden im Raume mit der Projectionsebene bestimmt einen Punkt in derselben, welcher der Durchschnittspunkt oder die Spur der Raumgeraden genannt wird. Durch diese Spur ist aber die Gerade im Raume nicht vollständig bestimmt; alle Geraden des Strahlenbündels, dessen Mittelpunkt dieser Schnittpunkt ist, haben dieselbe Spur. Von allen Geraden dieses Bündels sind nur zwei, nämlich die durch das Projectionscentrum gehende, und die auf der Projectionsebene senkrechte Gerade desselben bestimmt. Alle durch das Projectionscentrum gehenden Geraden, Projectionsstrahlen, sowie die Normalen zur Projectionsebene sind daher durch ihre Spur allein bestimmt. Jeder Punkt in der Projectionsebene bestimmt also auch die Lage zweier Raumgeraden, nämlich den durch ihn gehenden Projectionsstrahl, und die durch ihn gelegte Normale zur Projectionsebene. Durch passend gewählte Bezeichnun-

lich ferne Gerade, die Stellung, der durch sie gehenden projicirenden Ebene. Durch passend gewählte Bezeichnungen können wieder diese beiden Arten von Geraden von einander unterschieden werden.

§. 34. Die Lage irgend eines Punktes a im Raume ist durch zwei durch ihn gehende Gerade vollkommen bestimmt. Von allen Geraden des Strahlenbündels jedoch, dessen Mittelpunkt der angenommene Raumpunkt ist, sind nach §. 33 zwei, nämlich der durch ihn gehende Projectionsstrahl, und das von ihm zur Projectionsebene gefällte Perpendikel durch die entsprechenden Spuren in der Projectionsebene allein be stimmt. Die Spur a' des durch den Punkt a gezogenen Projectionsstrahls heisst, wie bereits erwähnt, die Centralprojection, während der Fusspunkt a'' der von ihm zur Projectionsebene gezogenen Normalen die Orthogonalprojection des Punktes a genannt wird; die Punkte a' und a'' in der Projectionsebene genügen vollständig zur Lagenbestimmung der erwähnten beiden durch a gehenden Geraden, und im Durchschnittspunkte dieser beiden Geraden ist auch die Lage des Punktes a vollkommen bestimmt.

gen können wieder diese beiden Arten von Geraden von einander unterschieden werden.

Die Lage irgend einer Ebene A im Raume ist durch zwei in ihr liegende Gerade vollkommen bestimmt. Von allen Geraden des ebenen Systems jedoch, dessen Träger die angenommene Raumebene ist, sind nach §. 33 zwei, nämlich ihre Schnittlinie mit der Projectionsebene und ihre unendlich ferne Gerade, ihre Stellung, durch die entsprechenden Centralprojectionen allein bestimmt. Die mit ihrer Projection zusammenfallende Schnittlinie A_1 der Ebene mit der Projectionsebene heisst die Schnittlinie oder Spur der Ebene; die Projection A_2 der unendlich fernen Geraden derselben ist die Schnittlinie der durch das Projectionscentrum zur Ebene A gelegten Parallelebene (Fluchtebene) und wird die Fluchtlinie der Ebene A genannt. Die Geraden A_1 und A_2 genügen vollständig zur Lagenbestimmung der erwähnten beiden in A liegenden Geraden, und in der Verbindungsebene dieser beiden Geraden

ist auch die Lage der Ebene A vollkommen bestimmt.

Irgend zwei Punkte a' und a'' in der Projectionsebene können jedoch nur dann als Central- und Orthogonalprojection desselben Raumpunktes a erscheinen, wenn die beiden durch diese Punkte in der Projectionsebene bestimmten Raumgeraden, Projectionsstrahl und Normale, sich wirklich in einem Punkte schneiden, daher in einer Ebene liegen. Da diese Ebene aber durch das Projectionscentrum und durch eine Normale zur Projectionsebene geht, so muss sie selbst zur letzteren senkrecht sein. Ihre Spur, welche zugleich die Verbindungsgerade der Punkte a' und a'' ist, muss daher durch die Orthogonalprojection des Projectionscentrums, d. i. den Hauptpunkt gehen.

Irgend zwei Gerade A_1 und A_2 in der Projectionsebene können jedoch nur dann als Spur und Fluchtlinie derselben Raumebene A erscheinen, wenn die beiden, durch diese Geraden in der Projectionsebene bestimmten Raumgeraden, Schnittlinie und unendlich ferne Gerade, wirklich in einer Ebene liegen, daher sich in einem Punkte schneiden. Da dieser Punkt aber in der Projectionsebene und zugleich in der unendlich fernen Ebene liegt, so ist er ein Punkt der unendlich fernen Geraden der Projectionsebene. Seine Centralprojection, welche zugleich der Schnittpunkt der Geraden A_1 und A_2 ist, muss daher ebenfalls in der unendlich fernen Geraden der Projectionsebene liegen.

Irgend ein Punkt a im Raume wird daher dargestellt durch seine Centralprojection a' und seine Orthogonalprojection a'', welche beide Punkte in einer durch den Hauptpunkt C' gehenden Geraden liegen müssen.

Irgend eine Ebene A im Raume wird daher dargestellt durch ihre Spur A_1 und ihre Fluchtlinie A_2, welche beide Gerade sich in einem unendlich fernen Punkte schneiden, d. h. parallel sein müssen.

Nur die Punkte des Hauptstrahls sind auf diese Weise nicht bestimmt, da für dieselben Projectionsstrahl und Perpendikel in dem Hauptstrahle, Central- und Orthogonalprojec-

Nur die zur Projectionsebene parallelen Ebenen sind auf diese Weise nicht bestimmt, da für dieselben Spur und unendlich ferne Gerade in der Stellung der Projectionsebene, Schnittlinie

tion daher im Hauptpunkte zusammenfallen.

Jeder solche Punkt erscheint jedoch durch die Darstellung irgend einer durch ihn gehenden Ebene vollkommen bestimmt.

Die Lage der Central- und Orthogonalprojection eines Punktes gegen den Hauptpunkt C' ist verschieden, je nachdem der Punkt vor der Gegenebene, zwischen Gegenebene und Projectionsebene, oder hinter der Projectionsebene liegt.

Liegt der Punkt a vor der Gegenebene, so ist in dem durch ihn gelegten Projectionsstrahl das Projectionscentrum zwischen dem gegebenen Punkte und seiner Centralprojection; daher muss auch die Orthogonalprojection des Centrums, der Hauptpunkt, zwischen der Orthogonalprojection a'' und der Centralprojection a' des Punktes liegen.

Liegt der Punkt b zwischen Gegenebene und Projectionsebene, so befindet sich in seinem Projectionsstrahl der Raumpunkt zwischen dem Projectionscentrum und der Centralprojection; daher muss, aus denselben Gründen wie früher, die Orthogonalprojection b'' zwischen der Centralprojection b' und dem Hauptpunkte liegen.

Liegt endlich ein Punkt d

und Fluchtlinie daher in derselben Geraden zusammenfallen.

Jede solche Ebene erscheint jedoch durch die Darstellung irgend eines in ihr liegenden Punktes vollkommen bestimmt.

Die Lage der Spur und Fluchtlinie einer Ebene gegen den Hauptpunkt C' ist verschieden, je nachdem die Ebene den Hauptstrahl vor dem Projectionscentrum, zwischen Centrum und Hauptpunkt, oder hinter dem Hauptpunkte schneidet.

Schneidet die Ebene A den Hauptstrahl hinter dem Hauptpunkte C', so liegt derselbe zwischen der gegebenen Ebene und der durch das Projectionscentrum gelegten Parallelebene; daher muss er auch zwischen der Spur dieser Parallelebene, der Fluchtlinie A_2 und der Spur A_1 der gegebenen Ebene liegen.

Schneidet die Ebene B den Hauptstrahl zwischen Centrum und Hauptpunkt, so liegt die gegebene Ebene zwischen der durch das Centrum gelegten Parallelebene und dem Hauptpunkt; daher muss, aus denselben Gründen wie früher, die Spur B_1 zwischen der Fluchtlinie B_2 und dem Hauptpunkte liegen.

Schneidet endlich eine Ebene

hinter der Projectionsebene, so kann auf gleiche Weise leicht nachgewiesen werden, dass in diesem Falle seine Centralprojection d' zwischen dem Hauptpunkte und der Orthogonalprojection d'' liegen muss.

Fig. 57a, Taf. IX, gibt die Darstellung dieser 3 Punkte a, b und d.

Liegt der Punkt a in der unendlich fernen Ebene, ist er eine bestimmte Richtung, so ist seine Centralprojection a' ein beliebiger Punkt der Projectionsebene, der Durchschnittspunkt des durch diese Richtung gehenden Projectionsstrahls; während seine Orthogonalprojection a'' ein unendlich ferner Punkt, die Richtung der Verbindungsgeraden $C'\,a'$ ist. Liegt der Punkt b in der Gegenebene, so ist seine Orthogonalprojection b'' ein beliebiger Punkt, während seine Centralprojection b' im Unendlichen liegt, daher als die Richtung der Verbindungsgeraden $b''C'$ erscheint. Bei einem Punkte d in der Projectionsebene fallen Orthogonal- und Centralprojection in einen Punkt zusammen, welcher für den Fall, dass der Punkt zugleich in der unendlich fernen Geraden der Projectionsebene liegt, ebenfalls im Unendlichen liegen muss. (Fig. 58a, Taf. IX.)

D den Hauptstrahl vor dem Projectionscentrum, so kann auf gleiche Weise leicht nachgewiesen werden, dass in diesem Falle ihre Fluchtlinie D_2 zwischen dem Hauptpunkte und der Spur D_1 liegen muss.

Fig. 57b, Taf. IX, gibt die Darstellung dieser 3 Ebenen A, B und D.

Geht die Ebene A durch den unendlich fernen Punkt, die Richtung des Hauptstrahls, ist sie also zur Projectionsebene senkrecht, so ist ihre Spur A_1 eine beliebige Gerade in der Projectionsebene, in welcher nämlich die Ebene A dieselbe schneidet; während ihre Fluchtlinie A_2 durch den Hauptpunkt C' gehen muss. Geht die Ebene B durch den Hauptpunkt, so ist ihre Fluchtlinie B_2 eine beliebige Gerade, während ihre Spur B_1 ebenfalls durch den Hauptpunkt gehen muss. Bei einer Ebene D, die durch das Projectionscentrum geht, fallen Spur und Fluchtlinie in eine Gerade zusammen, welche für den Fall, dass die Ebene zugleich durch den Hauptstrahl geht, also zur Projectionsebene senkrecht ist, durch den Hauptpunkt gehen muss. (Fig. 58b, Taf. IX.)

§. 35. Die Lage irgend einer Geraden α im Raume ist durch zwei durch sie gehende Ebenen vollkommen bestimmt. Von allen Ebenen des Ebenenbüschels jedoch, dessen Axe die angenommene Raumgerade ist, sind nach §. 32 zwei, nämlich die durch das Projectionscentrum gehende und die zur Projectionsebene senkrechte Ebene, durch ihre entsprechenden Spuren in der Projectionsebene allein bestimmt. Die Spur α' jener Ebene, welche die Raumgerade mit dem Projectionscentrum verbindet, heisst, wie erwähnt, die Centralprojection, während die Spur α'' der zur Projectionsebene senkrechten Ebene die Orthogonalprojection der Geraden α genannt wird. Die Geraden α' und α'' in der Projectionsebene genügen vollständig zur Bestimmung der erwähnten beiden durch die Gerade α gelegten Ebenen, und in der Durchschnittslinie derselben erscheint die Lage der Geraden α vollkommen bestimmt.

Die Lage irgend einer Geraden α im Raume ist durch zwei in ihr liegende Punkte vollkommen bestimmt. Von allen Punkten der Punktreihe jedoch, deren Träger die angenommene Raumgerade ist, sind nach §. 32 zwei, nämlich der in der Projectionsebene liegende Punkt und der unendlich ferne Punkt, durch ihre entsprechenden Centralprojectionen allein bestimmt. Der mit seiner Projection zusammenfallende Durchschnittspunkt α_1 der Geraden mit der Projectionsebene heisst der Durchschnittspunkt oder die Spur der Geraden, während die Projection α_2 des unendlich fernen Punktes, der Schnittpunkt des zur Geraden parallelen Projectionsstrahls (Fluchtstrahls) der F l u c h t p u n k t der Geraden α genannt wird. Die Punkte α_1 und α_2 in der Projectionsebene genügen vollständig zur Bestimmung der erwähnten beiden in der Geraden liegenden Punkte, und in der Verbindungsgeraden derselben erscheint die Lage der Geraden α vollkommen bestimmt.

Irgend eine Gerade α im Raume wird daher durch ihre Centralprojection α' und ihre Orthogonalprojection α'' dargestellt. Central- und Orthogonalprojection jedes in ihr lie-

Irgend eine Gerade α im Raume wird daher durch ihre Spur α_1 und ihren Fluchtpunkt α_2 dargestellt. Spur und Fluchtlinie jeder durch sie gelegten Ebene gehen durch die ent-

genden Punktes liegen in den entsprechenden Projectionen der Geraden.

sprechenden Punkte der Geraden.

Aus der einen Darstellungsart der Geraden lässt sich die andere leicht entwickeln, so dass also aus den Projectionen sich leicht Spur und Fluchtpunkt, und umgekehrt aus diesen Punkten die Projectionen bestimmen lassen.

Sind α' und α'', die Central- und Orthogonalprojection einer Geraden gegeben, so ergibt sich zunächst in dem Durchschnittspunkte derselben, als demjenigen Punkte der Geraden, für welchen Central- und Orthogonalprojection zusammenfallen, der Durchschnittspunkt α_1 derselben. Der Fluchtpunkt α_2 der Geraden ist die Centralprojection des unendlich fernen Punktes derselben, dessen Orthogonalprojection also in dem unendlich fernen Punkte der Orthogonalprojection α'' der Geraden liegen muss.

Der Schnittpunkt der Centralprojection α' mit der durch den Hauptpunkt C' zur Orthogonalprojection α'' der Geraden gezogenen Parallelen ist demnach der gesuchte Fluchtpunkt α_2 derselben. (Fig. 59, Taf. IX.)

Ist eine Gerade α zur Projectionsebene parallel, so fällt ihre Spur α_1 mit dem Schnittpunkte des zu ihr parallelen Projectionsstrahls, d. i. mit ihrem Fluchtpunkte α_2 in demselben unendlich fernen Punkt der Projectionsebene zusammen.

Sind α_1 und α_2, die Spur und der Fluchtpunkt einer Geraden gegeben, so ergibt sich zunächst in der Verbindungsgeraden derselben, als der Spur der durch die Gerade und das Projectionscentrum gelegten Ebene, für welche Spur und Fluchtlinie zusammenfallen, die Centralprojection α' derselben. Die Orthogonalprojection α'' der Geraden ist die Spur der durch sie gehenden Normalebene, deren Fluchtlinie also durch den Fluchtpunkt α_2 der Geraden und den Hauptpunkt C' gehen muss.

Die durch die Spur α_1 zur Verbindungsgeraden des Fluchtpunktes α_2 der Geraden mit dem Hauptpunkte C' gezogene Parallele ist demnach die gesuchte Orthogonalprojection α'' derselben. (Fig. 59, Taf. IX.)

Schneidet eine Gerade α den Hauptstrahl, so fallen die durch sie gelegte Normalebene und die centralprojicirende Ebene, folglich auch Orthogonal- und Centralprojection, in derselben durch den Hauptpunkt C' gehenden Geraden zusammen. Die

Die Gerade ist daher nur durch ihre Projectionen darstellbar, welche als zwei parallele Gerade erscheinen; die denselben gemeinsame Richtung ergibt den zusammenfallenden Flucht- und Durchschnittspunkt der Geraden α. (Fig. 60a, Taf. X.)

Geht die Gerade durch das Projectionscentrum, so fallen die Projectionsstrahlen aller ihrer Punkte mit der Geraden zusammen. Die Centralprojection der Geraden ist daher ein Punkt, während die Orthogonalprojection die Verbindungsgerade dieses Punktes mit dem Hauptpunkte ist. Spur und Fluchtpunkt fallen mit der als Punkt erscheinenden Centralprojection zusammen.

Geht die Gerade durch den unendlich fernen Punkt des Hauptstrahls, steht sie also auf der Projectionsebene senkrecht, so fallen alle Normalen durch ihre Punkte mit der Geraden zusammen. Die Orthogonalprojection ist daher ein Punkt, der Fusspunkt der gegebenen Geraden in der Projectionsebene. Die Centralprojection ist dann die Verbindungsgerade dieses Punktes mit dem Hauptpunkte. Die Spur fällt mit der als Punkt erscheinenden Orthogonalprojection, der Fluchtpunkt mit dem Hauptpunkte zusammen.

Gerade ist daher nur durch Spur und Fluchtpunkt darstellbar, welche in einer durch den Hauptpunkt gehenden Geraden liegen; diese Gerade ist zugleich die zusammenfallende Orthogonal- und Centralprojection der Geraden α. (Fig. 60b, Taf. X.)

Liegt die Gerade in der Projectionsebene, so fallen alle ihre Punkte mit derselben zusammen. Die Spur derselben ist also dann die Gerade selbst, während der Fluchtpunkt der unendlich entfernte Punkt, die Richtung, dieser Geraden ist. Central- und Orthogonalprojection fallen mit der als Gerade erscheinenden Spur der gegebenen Geraden zusammen.

Liegt die Gerade in der unendlich fernen Ebene, ist sie also eine bestimmte Stellung, so sind alle Projectionsstrahlen in der durch sie und das Projectionscentrum gelegten Ebene zur Geraden parallel. Der Fluchtpunkt derselben ist daher eine Gerade, die Schnittlinie der erwähnten durch das Centrum gelegten Ebene. Die Spur ist dann der unendlich ferne Punkt dieser Geraden. Die Centralprojection fällt mit dem als Gerade erscheinenden Fluchtpunkte, die Orthogonalprojection mit der unendlich fernen Geraden der Projectionsebene zusammen.

Liegt die Gerade in der Gegenebene, so ist die unendlich ferne Gerade der Projectionsebene ihre Centralprojection; Spur und Fluchtpunkt der Geraden fallen in dem unendlich fernen Punkte ihrer Orthogonalprojection zusammen.

Geht die Gerade durch den Hauptpunkt, so ist der Hauptpunkt ihre Spur; Central- und Orthogonalprojection der Geraden fallen in der Verbindungsgeraden ihres Fluchtpunktes mit dem Hauptpunkte zusammen.

§. 36. Ist eine Gerade als Träger einer Punktreihe gegeben, so liegen die Projectionen aller Punkte dieser Reihe in den entsprechenden Projectionen der Geraden. Sie bilden also zwei projectivische Punktreihen in der Projectionsebene, welche, da die Verbindungslinien der entsprechenden Punkte beider Reihen alle durch den Hauptpunkt gehen, in perspectivischer Lage sind. Der Schnittpunkt der Träger beider Reihen, als die zusammmenfallende Central- und Orthogonalprojection des in der Projectionsebene liegenden Punktes d der Raumreihe, ist ein entsprechender Punkt in beiden Reihen.

Ist eine Gerade als Axe eines Ebenenbüschels gegeben, so gehen die Spuren und Fluchtlinien aller Ebenen dieses Büschels durch die entsprechenden Punkte der Geraden. Sie bilden also zwei projectivische Strahlenbüschel in der Projectionsebene, welche, da die Schnittpunkte der zu einander parallelen entsprechenden Strahlen beider Büschel in der unendlich fernen Geraden liegen, in perspectivischer Lage sind. Die Verbindungslinie der Mittelpunkte beider Strahlenbüschel, als die zusammenfallende Spur und Fluchtlinie der durch das Projectionscentrum gehenden Ebene P des Ebenenbüschels, ist ein entsprechender Strahl beider Büschel.

Der unendlich ferne Punkt der Reihe, deren Träger die Orthogonalprojection der Geraden ist, als die Orthogonalprojection f'' des unendlich fernen Punktes f der Raumgeraden, hat seinen entsprechenden Punkt, die zugehörige Centralprojection f', in dem Flucht-

Der durch den Hauptpunkt gehende Strahl des Büschels, dessen Mittelpunkt der Fluchtpunkt der Geraden ist, als die Fluchtlinie S_2 der zur Projectionsebene senkrechten Ebene S des Ebenenbüschels, hat seinen entsprechenden Strahl, die zugehörige Durchschnittslinie

punkte α_2 der Geraden. Der unendlich ferne Punkt in der durch die Centralprojectionen der Punkte der Raumreihe gebildeten Punktreihe ist die Centralprojection g' des in der Gegenebene liegenden Punktes g; seine zugehörige Orthogonalprojection g'' findet sich in der Verbindungsgeraden des Hauptpunktes C' mit dem unendlich fernen Punkte der Centralprojection, also dort, wo die zur Centralprojection α' durch den Hauptpunkt gezogene Parallele die Orthogonalprojection α'' trifft (Fig. 61a, Taf. X). Diese Punkte f' und g'' in den beiden projectivischen Punktreihen, welche dem unendlich fernen Punkte der andern Reihe entsprechen, nennt man die Gegenpunkte der beiden Reihen.

Ist die Gerade zur Projectionsebene parallel, so fallen Spur und Fluchtpunkt derselben in dem unendlich fernen Punkte ihrer zu einander parallelen Central- und Orthogonalprojection zusammen. Die Träger der beiden Punktreihen sind also parallel, und die beiden unendlich fernen Punkte derselben entsprechen sich gegenseitig.

Liegt die Gerade in der un- S_1, in der Orthogonalprojection α'' der Geraden. Der durch den Hauptpunkt gehende Strahl des von den Spuren der Ebenen des Ebenenbüschels gebildeten Strahlenbüschels ist die Durchschnittslinie H_1 der durch den Hauptpunkt gehenden Ebene H; seine zugehörige Fluchtlinie H_2 ist also die durch den Fluchtpunkt α_2 zur Verbindungsgeraden des Hauptpunktes C' mit der Spur α_1 gezogene Parallele (Fig, 61b, Taf. X). Da die entsprechenden Strahlen der beiden projectivischen Strahlenbüschel, wie bereits erwähnt, zu einander parallel sind, so sind die Winkel, welche je zwei entsprechende Strahlen in beiden Büscheln einschliessen, einander gleich; solche projectivische Strahlenbüschel nennt man gleich.

Schneidet die Gerade den Hauptstrahl, so fallen Central- und Orthogonalprojection derselben in der durch den Hauptpunkt gehenden Verbindungsgeraden ihrer Spur mit dem Fluchtpunkte zusammen. Die Mittelpunkte der beiden Strahlenbüschel liegen also in einer durch den Hauptpunkt gehenden Geraden, und die durch diesen Punkt gehenden Strahlen entsprechen sich gegenseitig.

Steht die Gerade zur Projec-

endlich fernen Ebene, so ist ihre Orthogonalprojection, liegt sie in der Gegenebene, so ist ihre Centralprojection die unendlich ferne Gerade; dieselbe ist daher in beiden Fällen der Träger einer der beiden Punktreihen, und die Punkte derselben sind die Richtungen der Verbindungsgeraden der Punkte der andern Reihe mit dem Hauptpunkt.

Liegt die Gerade in der Projectionsebene, so fallen ihre Central- und Orthogonalprojection, sowie die beiden Projectionen aller ihrer Punkte zusammen; die beiden Punktreihen decken sich.

Schneidet die Gerade den Hauptstrahl, so fallen Central- und Orthogonalprojection derselben in einer durch den Hauptpunkt gehenden Geraden zusammen. Die beiden Punktreihen sind in demselben Träger vereinigt. Der Hauptpunkt als die zusammenfallende Central- und Orthogonalprojection des in dem Hauptstrahl liegenden Punktes der Geraden, sowie die Spur α_1 derselben, in welchem die Central- und Orthogonalprojection des Punktes in der Projectionsebene vereinigt sind, geben die zwei zusammenfallenden entsprechenden Punkte der beiden vereinigten Punktreihen. Die Bestimmung

tionsebene senkrecht, so liegt ihr Fluchtpunkt, geht sie durch den Hauptpunkt, so liegt ihre Spur im Hauptpunkt; derselbe ist daher in beiden Fällen der Mittelpunkt eines der beiden Strahlenbüschel, und die Strahlen desselben sind die durch den Hauptpunkt gehenden Parallelen zu den Strahlen des andern Büschels.

Geht die Gerade durch das Projectionscentrum, so fallen ihre Spur und ihr Fluchtpunkt, sowie die Spuren und Fluchtlinien aller durch sie gehenden Ebenen zusammen; die beiden Strahlenbüschel decken sich.

Ist die Gerade zur Projectionsebene parallel, so fallen Spur und Fluchtpunkt in einem unendlich fernen Punkte zusammen. Die beiden Strahlenbüschel sind daher concentrische Parallelstrahlenbüschel. Die unendlich ferne Gerade, als die zusammenfallende Spur und Fluchtlinie der zur Projectionsebene parallelen Ebene des Ebenenbüschels, sowie die Centralprojection α' der Geraden, in welcher Spur und Fluchtlinie der durch das Centrum gehenden Ebene vereinigt sind, geben die zwei zusammenfallenden entsprechenden Strahlen der beiden concentrischen Strahlenbüschel. Die Bestim-

des entsprechenden Punktes einer der beiden Reihen zu einem gegebenen Punkte der andern Reihe kann auf directem Wege nicht geschehen, da die durch den Hauptpunkt gehende Verbindungsgerade der beiden Punkte mit dem gemeinsamen Träger beider Reihen zusammenfällt.

Sind (Fig. 62a, Taf. X) α_1 und α_2 Spur und Fluchtpunkt, ihre durch den Hauptpunkt gehende Verbindungsgerade die zusammenfallende Central- und Orthogonalprojection $\alpha'\alpha''$ einer solchen den Hauptstrahl schneidenden Geraden, und ist a' die Centralprojection irgend eines Punktes a derselben; so kann man die zugehörige Orthogonalprojection a'' dieses Punktes durch die Annahme einer Hülfsgeraden β finden, welche die gegebene Gerade α in dem Punkte a schneidet, mithin mit ihr in einer Ebene A liegen muss. Die Centralprojection β' dieser Geraden ist irgend eine durch den Punkt a' gehende Gerade, in welcher noch der Fluchtpunkt β_2 oder die Spur β_1 willkürlich angenommen werden kann. Ist β_2 der angenommene Fluchtpunkt, so gibt die Verbindungsgerade $\alpha_2\,\beta_2$ die Fluchtlinie A_2 der durch α und β gelegten Ebene A, deren Spur A_1 durch den

desmung entsprechenden Strahles eines der beiden Büschel zu einem gegebenen Strahle des andern Büschels kann auf directem Wege nicht geschehen, da sämmtliche Strahlen beider Büschel zu einander parallel erscheinen.

Sind (Fig. 62b, Taf. X) α' und α'' Central- und Orthogonalprojection, ihr im Unendlichen liegender Schnittpunkt die mit dem Fluchtpunkte α_2 zusammenfallende Spur α_1 einer solchen zur Projectionsebene parallelen Geraden, und ist A_1 die Spur irgend einer durch sie gehenden Ebene A; so kann man die zugehörige Fluchtlinie A_2 dieser Ebene durch die Annahme einer Hülfsgeraden β finden, welche mit der gegebenen Geraden α in der Ebene A liegt, mithin dieselbe in einem Punkte a schneiden muss. Die Spur β_1 dieser Geraden ist irgend ein in der Geraden A_1 liegender Punkt, durch welchen noch die Orthogonalprojection β'' oder die Centralprojection β' willkürlich angenommen werden kann. Ist β'' die angenommene Orthogonalprojection, so gibt der Schnittpunkt $\alpha''\beta''$ die Orthogonalprojection a'' des Schnittpunktes der Geraden α und

Punkt α_1 gehen muss. Der Schnittpunkt von A_1 mit der angenommenen Centralprojection β' der Hülfsgeraden gibt die Spur β_1 derselben. Aus der Spur und dem Fluchtpunkte wird die Orthogonalprojection β'' der Geraden β auf bekannte Weise bestimmt; der Schnittpunkt a'' der Orthogonalprojectionen α'' und β'' der gegebenen und der Hülfsgeraden ist dann die gesuchte Orthogonalprojection des Punktes a. In ganz ähnlicher Weise findet man die Centralprojection eines Punktes der Geraden α, wenn die zugehörige Orthogonalprojection gegeben ist.

Von den beiden Punkten f' und g'', welche in beiden Reihen den unendlich fernen Punkten der andern Reihe entsprechen, fällt der eine f', die Centralprojection des unendlich fernen Punktes der Raumgeraden, dessen Orthogonalprojection f'' also ebenfalls im Unendlichen liegt, mit dem Fluchtpunkte α_2 der Geraden zusammen. Der andere g'', die Orthogonalprojection des in der Gegenebene liegenden Punktes, dessen Centralprojection g' im Unendlichen liegt, kann nach der obigen Construction durch Annahme einer Hülfsgeraden γ, deren Centralprojection γ' zu $\alpha'\alpha''$ parallel ist, leicht gefunden werden.

β, dessen Centralprojection a' in der Geraden α' liegen muss. Die Verbindungsgerade von a' mit der angenommenen Spur β_1 der Hülfsgeraden gibt die Centralprojection β' derselben. Aus der Central- und Orthogonalprojection wird der Fluchtpunkt β_2 der Geraden β auf bekannte Weise bestimmt; die durch β_2 zur gegebenen Spur A_1 gezogene Parallele A_2 ist dann die gesuchte Fluchtlinie der Ebene A. In ganz ähnlicher Weise findet man die Spur einer durch die Gerade α gehenden Ebene, wenn die zugehörige Fluchtlinie gegeben ist.

Von den beiden Strahlen S_1 und H_2, welche in beiden Büscheln dem durch den Hauptpunkt gehenden Strahl des andern Büschels entsprechen, fällt der eine S_1, die Spur der zur Projectionsebene senkrechten Ebene des Ebenenbüschels, deren Fluchtlinie S_2 also durch den Hauptpunkt geht, mit der Orthogonalprojection α'' der Geraden zusammen. Der andere H_2, die Fluchtlinie der durch den Hauptpunkt gehenden Ebene, deren Spur H_1 durch den Hauptpunkt geht, kann nach der obigen Construction durch Annahme einer Hülfsgeraden γ, deren Spur γ_1 in H_1 liegt, leicht gefunden werden.

Einfacher gestaltet sich die Lösung dieser Aufgabe durch Umlegung der durch die Gerade α und das Projectionscentrum gelegten Ebene M in die Projectionsebene. Die Projectionsstrahlen, sowie die Normalen zur Projectionsebene aller Punkte der Geraden α liegen in dieser Ebene, und ihre Schnittpunkte mit der bei der Umlegung unverändert gebliebenen Spur dieser Ebene, welche eben die zusammenfallende Orthogonal- und Centralprojection der Geraden α ist, sind die gesuchten Projectionen dieser Punkte. Da die Ebene M auf der Projectionsebene senkrecht steht, so kommt das Projectionscentrum nach der Umlegung nach (C) (Fig. 63a, Taf. X), wo die zur Spur senkrechte Gerade vom Hauptpunkt den Distanzkreis trifft. Die Verbindungsgerade des umgelegten Centrums (C) mit dem Fluchtpunkte α_2 der Geraden α gibt den umgelegten Projectionsstrahl des unendlich fernen Punktes derselben; die Umlegung (α) der Geraden ist zu diesem Projectionsstrahle parallel und geht durch den bei der Umlegung unverändert gebliebenen Punkt α_1. Die Verbindungslinie irgend eines Punktes (a) dieser Geraden mit dem umgelegten

Einfacher gestaltet sich die Lösung dieser Aufgabe durch Umlegung der durch das Projectionscentrum senkrecht zur Geraden α gelegten Ebene M in die Projectionsebene. Die Gerade α schneidet diese Ebene in einem Punkte a, dessen Projectionen a' und a'' in den betreffenden Projectionen der Geraden α liegen müssen, und zwar in den Schnittpunkten derselben mit der Spur der Ebene M, welche als die vom Hauptpunkte auf α' und α'' gefällte Senkrechte erscheint. Da die Ebene M auf der Projectionsebene senkrecht steht, so kommt das Projectionscentrum nach der Umlegung nach (C) (Fig. 63b, Taf. X), wo die zur Spur senkrechte Gerade vom Hauptpunkt den Distanzkreis trifft. Die Verbindungsgerade der Centralprojection a' des Punktes a mit dem umgelegten Centrum (C) gibt den umgelegten Projectionsstrahl, und die durch a'' zur Spur der Ebene M gezogene Senkrechte die umgelegte Normale zur Projectionsebene des Punktes a, und in dem Schnittpunkte (a) dieser beiden Geraden ergibt sich die Umlegung des Punktes a. Jeder durch den Punkt (a) gehende Strahl erscheint als die Umlegung der Schnittlinie irgend

Centrum (C) gibt den Projectionsstrahl, und die durch (a) zur Spur der Ebene M gefällte Senkrechte die Normale zur Projectionsebene des Raumpunktes a nach der Umlegung. Die Schnittpunkte a' und a'' dieser beiden Geraden mit der Spur der umgelegten Ebene geben die bei der Umlegung unverändert gebliebenen zusammengehörigen Projectionen des Punktes a der Geraden.

einer Ebene A des Ebenenbüschels α mit der Ebene M, und ebenso ist der durch (C) gezogene Parallelstrahl die umgelegte Schnittlinie der durch das Projectionscentrum gelegten zur Ebene A parallelen Fluchtebene. Die Schnittpunkte dieser Strahlen mit der Spur der Ebene M bestimmen daher Punkte der Spur A_1 und der Fluchtlinie A_2 der Ebene A, durch welche Punkte A_1 und A_2 parallel zu den Projectionen der Geraden α gezogen werden können.

§. 37. Ist eine Ebene A als Träger eines ebenen Systems gegeben, so bilden die Central- und Orthogonalprojectionen aller Punkte und Geraden dieses Systems zwei in der Projectionsebene vereinigte collineare ebene Systeme, welche wir wieder als die Systeme 1 und 2 von einander unterscheiden wollen. Die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte beider Systeme, der zusammengehörigen Projectionen desselben Punktes der Ebene A gehen durch den Hauptpunkt; die Schnittpunkte entsprechender Geraden, der zusammengehörigen Projectionen einer Geraden des Raumsystems, sind die Spuren der betreffenden Geraden, und lie-

Ist ein Punkt a als Mittelpunkt eines Strahlenbündels gegeben, so bilden die Spuren und Fluchtpunkte aller Geraden, sowie die Spuren und Fluchtlinien aller Ebenen dieses Bündels zwei in der Projectionsebene vereinigte collineare ebene Systeme, welche wir wieder als die Systeme I und II von einander unterscheiden wollen. Die Schnittpunkte entsprechender Geraden beider Systeme, der zusammengehörigen Spur und Fluchtlinie derselben Ebene des Bündels a, liegen im Unendlichen; die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte, welche als Spur und Fluchtpunkt derselben Geraden des Strahlenbündels erscheinen, sind

gen daher alle in der Spur A_1 der Ebene A.

Die beiden in der Projectionsebene vereinigten ebenen Systeme 1 und 2 sind mithin in perspectivischer Lage; der Hauptpunkt C' und die Spur A_1 der Ebene A ergeben sich als Collineations-Centrum und Axe.

Zu jeder Geraden des einen Systems, z. B. zu α' (Fig. 64a, Taf. X), als der Centralprojection einer Geraden α des Raumsystems, kann nun leicht die entsprechende Gerade des andern Systems, die zugehörige Orthogonalprojection α'' dieser Geraden, gefunden werden. Der Schnittpunkt α_1 der Geraden α' mit der als Collineationsaxe erscheinenden Spur A_1 der Ebene A entspricht sich in beiden Systemen selbst; der Schnittpunkt der Geraden α' mit der Fluchtlinie A_2 ist die Centralprojection f' des unendlich fernen Punktes f der Geraden (zugleich der Fluchtpunkt α_2 derselben); er hat also seinen entsprechenden Punkt, die zugehörige Orthogonalprojection in der unendlich fernen Geraden. Die gesuchte Gerade α'' ist daher die Verbindungsgerade des sich

die Centralprojectionen der betreffenden Geraden und gehen daher alle durch die Centralprojection a' des Punktes a.

Die beiden in der Projectionsebene vereinigten ebenen Systeme I und II sind mithin in perspectivischer Lage; die unendlich ferne Gerade und die Centralprojection a' des Punktes a ergeben sich als Collineations-Axe und Centrum.

Zu jedem Punkte des einen Systems, z. B. zu α_1 (Fig. 64b, Taf. X), als der Spur einer Geraden α des Strahlenbündels, kann nun leicht der entsprechende Punkt des andern Systems, der zugehörige Fluchtpunkt α_2 dieser Geraden, gefunden werden. Die Verbindungsgerade α' des Punktes α_1 mit der als Collineationscentrum erscheinenden Centralprojection a' des Punktes a entspricht sich in beiden Systemen selbst. Die Verbindungsgerade des Punktes α_1 mit der Orthogonalprojection a'' ist die Spur S_1 der zur Projectionsebene senkrechten Ebene S der Geraden α (zugleich die Orthogonalprojection α'' derselben); es muss also die entsprechende Gerade, die zugehörige Fluchtlinie S_2 durch den Hauptpunkt gehen. Der gesuchte Punkt α_2 ist daher

selbst entsprechenden Punktes α_1 mit der Richtung des zu dem Punkte α_2 gezogenen Collineationsstrahls. Die Fluchtlinie A_2 der Ebene A ist also jene Gerade des Systems 1, welche der unendlich fernen Geraden im Systeme 2 entspricht. Die Orthogonalprojection γ'' der in der Gegenebene gelegenen Geraden γ des Raumsystems ist, da die Centralprojection dieser Geraden im Unendlichen liegt, jene Gerade im Systeme 2, welche der unendlich fernen Geraden im Systeme 1 entspricht. Diese Gerade γ'' ist jedenfalls zu der Spur und Fluchtlinie A_1 und A_2 der Ebene A parallel; ein Punkt derselben kann mit Hülfe der nach Obigem bestimmten Central- und Orthogonalprojectionen einer beliebigen Geraden α des Raumsystems leicht gefunden werden. Die durch den Hauptpunkt parallel zur Centralprojection α' dieser Geraden gezogene Gerade trifft die Orthogonalprojection α'' derselben in einem Punkte g'', der die Orthogonalprojection des in der Gegenebene liegenden Punktes der Geraden α ist, und durch welchen die erwähnte Projection γ'' parallel zur Schnittlinie A_1 gezogen werden kann. Der Hauptpunkt als die vereinigte der Schnittpunkt der sich selbst entsprechenden Geraden α_1 mit der durch den Hauptpunkt zur Geraden α'' gezogenen Parallelen. Die Orthogonalprojection a'' des Punktes a ist also jener Punkt im Systeme I, welcher dem Hauptpunkte C' im Systeme II entspricht. Der Fluchtpunkt ζ_2 der durch den Hauptpunkt gehenden Geraden ζ des Strahlenbündels ist, da die Spur dieser Geraden im Hauptpunkte liegt, jener Punkt im Systeme II, welcher dem Hauptpunkte im Systeme I entspricht. Dieser Punkt ζ_2 liegt jedenfalls in der durch die Central- und Orthogonalprojection a' und a'' des Punktes a gelegten Geraden, eine zweite durch ihn gehende Gerade kann mit Hülfe der nach Obigem bestimmten Schnitt- und Fluchtpunkte einer beliebigen Geraden α des Strahlenbündels leicht gefunden werden. Die zur Verbindungslinie der Spur α_1 dieser Geraden mit dem Hauptpunkte C', durch den Fluchtpunkt α_2 gezogene Parallele ist die Fluchtlinie H_2 der durch diese Gerade und den Hauptpunkt gelegten Ebene, in welcher der erwähnte Fluchtpunkt ζ_2 liegen muss. Die unendlich ferne Gerade als die vereinigte Spur- und Fluchtlinie der zur Pro-

Central- und Orthogonalprojection des Schnittpunktes der Ebene A mit dem Hauptstrahl entspricht sich in beiden Systemen selbst. Die Gegenaxen der beiden perspectivisch collinearen Systeme sind also die zur Collineationsaxe A_1 parallelen Geraden A_2 und γ'', in welchen die den unendlich fernen Punkten des andern Systems entsprechenden Punkte beider Systeme liegen. Zwei einander entsprechende Punkte m' und m'' beider Systeme, die zusammengehörigen Projectionen eines Punktes m im ebenen Systeme, können nun mit Hülfe einer durch den Punkt m gelegten Geraden α, und des Hauptpunktes C' als Collineationscentrum leicht gefunden werden.

jectionsebene parallelen Ebene des Strahlenbündels entspricht sich in beiden Systemen selbst, erscheint also auch als Gegenaxe in beiden Systemen. Diese besondere Art der perspectivischen Collineation, wobei die Collineationsaxe und die beiden Gegenaxen in der unendlich fernen Geraden vereinigt erscheinen, einander entsprechende Gerade beider Systeme daher parallell sind, heisst Aehnlichkeit; das Collineationscentrum wird in diesem Falle der Aehnlichkeitspunkt beider Systeme genannt. Zwei einander entsprechende Gerade M_1 und M_2 beider Systeme, die zusammengehörige Spur und Fluchtlinie einer Ebene M im Strahlenbündel, können nun mit Hülfe einer in der Ebene M liegenden Geraden α_r und der unendlich fernen Geraden als Collineationsaxe leicht gefunden werden.

Ist die Ebene A parallel zur Projectionsebene, so fällt ihre Spur A_1, die Collineationsaxe der beiden Systeme 1 und 2, ins Unendliche; die perspectivische Collineation der beiden Systeme geht also hier in den speciellen Fall der Aehnlichkeit über, mit dem Hauptpunkte C' als Aehnlichkeitspunkt. Die entsprechenden Elemente beider ähnlichen Systeme können

Liegt der Punkt a in dem Hauptstrahl, so fällt seine Centralprojection a', das Collineationscentrum der beiden Systeme I und II in den Hauptpunkt C'; die beiden Systeme sind auch in diesem Falle perspectivisch ähnlich mit dem Hauptpunkte C' als Aehnlichkeitspunkt. Die entsprechenden Elemente beider ähnlichen Systeme können dann aus einem

dann aus einem beliebig angenommenen Paare entsprechender Punkte, der zusammengehörigen Central- und Orthogonalprojection $a'a''$ eines in der Ebene A liegenden Punktes a, durch dessen willkürliche Annahme nach §. 34 die Ebene A erst bestimmt erscheint, leicht construirt werden.

Geht die Ebene A durch das Projectionscentrum, so erscheint ihre vereinigte Spur und Fluchtlinie A_1 als die Centralprojection aller in ihr liegenden Geraden, und ebenso liegen die Centralprojectionen aller Punkte der Ebene A in dieser Spur. Das von den Centralprojectionen der Punkte und Geraden des Raumsystems gebildete System 1 reducirt sich daher in diesem Falle auf eine Gerade und alle in ihr liegenden Punkte. Jeder willkürlich angenommenen Geraden α'' des Systems 2, als der Orthogonalprojection einer Geraden α des Raumsystems, entspricht die Spur A_1 als zugehörige Centralprojection; während der beliebig gewählten Orthogonalprojection a'' eines Punktes a dieses Raumsystems jener Punkt der Geraden A_1 als zugehörige Centralprojection a' entspricht, welcher in dem durch a'' gezogenen Collineationsstrahl liegt.

beliebig angenommenen Paare entsprechender Geraden, der zusammengehörigen Schnitt- und Fluchtlinie $A_1 A_2$ einer durch den Punkt a gehenden Ebene A, durch deren willkürliche Annahme nach §. 34 der Punkt a erst bestimmt erscheint, leicht construirt werden.

Liegt der Punkt a in der Projectionsebene, so erscheint seine vereinigte Central- und Orthogonalprojection a' als der Schnittpunkt aller durch ihn gehenden Geraden, und ebenso gehen die Spuren aller durch den Punkt a gelegten Ebenen durch diese Projection. Das von den Spuren der Ebenen und Geraden des Strahlenbündels gebildete System I reducirt sich daher in diesem Falle auf einen Punkt und alle durch ihn gehenden Geraden. Jedem willkürlich angenommenen Punkte α_2 des Systems II, als dem Fluchtpunkt einer Geraden α des Strahlenbündels, entspricht die Projection a' als zugehöriger Durchschnittspunkt; während der beliebig gewählten Fluchtlinie A_2 einer Ebene A dieses Strahlenbündels die durch diesen Punkt a' zu A_2 gezogene Parallele A_1 als zugehörige Spur entspricht.

Ist dagegen die Ebene A senkrecht zur Projectionsebene, so erscheint als die gemeinsame Orthogonalprojection aller in ihr liegenden Geraden die Spur A_1 dieser Ebene, in welcher Geraden A_1 auch die Orthogonalprojectionen aller Punkte der Ebene liegen müssen. In diesem Falle erscheint daher das System 2 auf eine Punktreihe reducirt, deren Träger jeder Geraden, und deren Punkte jedem mit ihnen in demselben Collineationsstrahle liegenden Punkte des Systems 1 entsprechen.

Ist der Träger des ebenen Systems die Projectionsebene, so fallen die Central- und Orthogonalprojectionen aller Punkte und Geraden desselben zusammen. Die Systeme 1 und 2 decken sich daher.

Liegt dagegen der Punkt a in der unendlich fernen Ebene, so erscheint als der gemeinsame Fluchtpunkt aller durch ihn gehenden Geraden die Centralprojection a' dieses Punktes, durch welchen Punkt a' auch die Fluchtlinien aller durch a gelegten Ebenen gehen müssen. In diesem Falle erscheint daher das System II auf einen Strahlenbüschel reducirt, dessen Mittelpunkt jedem Punkte, und dessen Strahlen jeder zu ihnen parallelen Geraden des Systems I entsprechen.

Ist der Mittelpunkt des Strahlenbündels das Projectionscentrum, so fallen die Spuren und Fluchtelemente aller Ebenen und Geraden desselben zusammen. Die Systeme I und II decken sich daher.

§. 38. Der Strahlenbüschel, welcher sowohl dem ebenen Systeme seines Trägers, als auch dem Strahlenbündel seines Mittelpunktes angehört, kann entweder durch die Central- und Orthogonalprojectionen, oder durch die Spuren und Fluchtpunkte seiner Elemente dargestellt werden. Die erstern bilden zwei projectivische Strahlenbüschel in perspectivischer Lage, deren Mittelpunkte die entsprechenden Projectionen des Mittelpunktes des Strahlenbüschels im Raume sind, und deren entsprechende Strahlen sich in der Spur der Ebene desselben schneiden. Die letzteren ergeben zwei projectivische Punktreihen in perspectivischer Lage, als deren Träger Spur und Fluchtlinie der Ebene des Strahlenbüschels erscheinen, und von denen je zwei entsprechende Punkte in einer durch die Centralprojection des Mittelpunktes des Büschels gehenden Geraden liegen.

Aufgaben über die gegenseitige Bestimmung geometrischer Elemente und Grundgebilde.

§. 39. Die Aufgaben des §. 19 über die Darstellung solcher geometrischer Elemente und Grundgebilde, welche durch zwei oder mehrere andere gegebene bestimmt erscheinen, sollen nun auch in centralprojectivischer Darstellung durchgeführt werden.

1a. Sind (Fig. 65a, Taf. X) $a'a''$, $b'b''$ die Central- und Orthogonalprojectionen zweier gegebener Punkte a und b, so geben die Verbindungsgeraden der entsprechenden Projectionen beider Punkte die Central- und Orthogonalprojection α' und α'' ihrer Verbindungsgeraden α, aus welchen sich nach §. 35 die Spur α_1 und der Fluchtpunkt α_2 dieser Geraden leicht bestimmen lassen.

1b. Sind (Fig. 65b, Taf. X) $A_1 A_2$, $B_1 B_2$ die Spuren und Fluchtlinien zweier gegebener Ebenen A und B, so geben die Schnittpunkte der entsprechenden Bestimmungselemente beider Ebenen die Spur α_1 und den Fluchtpunkt α_2 ihrer Schnittgeraden α, aus welchen sich nach §. 35 die Centralprojection α' und die Orthogonalprojection α'' dieser Geraden leicht bestimmen lassen.

Bei speciellen Lagen der gegebenen Elemente bleiben die Constructionen wesentlich dieselben, indem man nur auf die in den §§. 34 und 35 angeführten speciellen Darstellungsformen der geometrischen Elemente bei besondern Lagenverhältnissen gegen das Projectionssystem gehörige Rücksicht zu nehmen hat. In den folgenden beiden Fällen jedoch ist zur Lösung dieser Aufgaben eine besondere Hülfsconstruction nothwendig.

Liegen die beiden Punkte in derselben durch den Hauptstrahl gehenden Ebene, so fallen die Verbindungsgeraden ihrer entsprechenden Projectionen in dieselbe durch den Hauptpunkt gehende Gerade, und die Verbindungsgerade ab (α) im Raume schneidet den Hauptstrahl.

Gehen die beiden Ebenen durch denselben unendlich fernen Punkt der Projectionsebene, so fallen die Schnittpunkte ihrer nun parallelen Spuren und Fluchtlinien in denselben, unendlich fernen Punkt, und die Schnittgerade AB (α) im Raume ist zur Projectionsebene parallel.

Eine solche Gerade ist aber durch ihre Projectionen nicht bestimmt, und kann nur durch ihre Spur und den Fluchtpunkt, welche beide Punkte mit den Projectionen der Punkte a und b in derselben durch den Hauptpunkt gehenden Geraden liegen müssen, dargestellt werden. Um Spur und Fluchtpunkt der Geraden α zu finden, verbindet man die gegebenen Punkte a und b mit einem willkürlich gewählten Punkte d, und bestimmt die Spuren und Fluchtpunkte der Geraden $ad(\beta)$ und $bd(\gamma)$; in den Verbindungsgeraden der entsprechenden Spuren und Fluchtpunkte der Geraden β und γ müssen dann die Spur und der Fluchtpunkt der Geraden α liegen, da diese Verbindungsgeraden als Schnitt- und Fluchtlinie einer durch α gehenden Ebene A erscheinen.

Sind also (Fig. 66a, Taf. XI) $a'a''$, $b'b''$ die Central- und Orthogonalprojectionen zweier solcher Punkte, und $d'd''$ die Projectionen irgend eines dritten Punktes, so geben die Verbindungsgeraden $a'd'$, $b'd'$ die Centralprojectionen $\beta'\gamma'$, und die Geraden $a''d''$, $b''d''$ die Orthogonalprojectionen $\beta''\gamma''$ der beiden Geraden β und γ. Bestimmt man nun aus $\beta'\beta''$, $\gamma'\gamma''$ die Spuren $\beta_1\gamma_1$ und die

Eine solche Gerade ist aber durch Spur und Fluchtpunkt nicht bestimmt, und kann nur durch ihre Projectionen, welche zu den Spuren und Fluchtlinien der Ebenen A und B parallel sein müssen, dargestellt werden. Um Central- und Orthogonalprojection der Geraden α zu finden, schneidet man die gegebenen Ebenen A und B durch eine willkürlich gewählte Ebene D, und bestimmt die Central- und Orthogonalprojectionen der Geraden $AD(\beta)$ und $BD(\gamma)$; durch die Schnittpunkte der entsprechenden Projectionen der Geraden β und γ müssen dann die Central- und Orthogonalprojection der Geraden α gehen, da diese Schnittpunkte als die Projectionen eines in der Geraden α liegenden Punktes a erscheinen.

Sind also (Fig. 66b, Taf. XI) A_1A_2, B_1B_2 die Spuren und Fluchtlinien zweier solcher Ebenen, und D_1D_2 die Spur und Fluchtlinie irgend einer dritten Ebene, so geben die Schnittpunkte A_1D_1, B_1D_1 die Spuren $\beta_1\gamma_1$, und die Punkte A_2D_2, B_2D_2 die Fluchtpunkte $\beta_2\gamma_2$ der beiden Geraden β und γ. Bestimmt man nun aus $\beta_1\beta_2$, $\gamma_1\gamma_2$ die Centralprojectionen $\beta'\gamma'$ und die Orthogonalpro-

Fluchtpunkte $\beta_2 \gamma_2$ dieser Geraden, so gibt die Verbindungsgerade $\beta_1 \gamma_1$ die Spur A_1 und $\beta_2 \gamma_2$ die Fluchtlinie A_2 einer durch α gehenden Ebene A. In den Schnittpunkten von A_1 und A_2 mit der durch den Hauptpunkt gehenden Verbindungsgeraden der Projectionen $a'a''$, $b'b''$, in welcher Central- und Orthogonalprojection der Geraden α vereinigt sind, ergeben sich die gesuchte Spur α_1 und der Fluchtpunkt α_2 der Geraden α.

Dieselbe Hülfsconstruction kann auch angewendet werden, wenn wegen der geringen Neigung der beiden durch den Hauptpunkt gehenden Geraden $a'a''$, $b'b''$ die Spur und der Fluchtpunkt α_1 und α_2 der Verbindungsgeraden α sich auf die gewöhnliche Weise nicht genau bestimmen lassen.

Noch einfacher gestaltet sich die Lösung dieser Aufgabe durch Umlegung der durch die Gerade ab und das Projectionscentrum gelegten Ebene, deren Spur M_1 (Fig. 67a, Taf. XI) die durch den Hauptpunkt gehende Verbindungsgerade der Punkte $a'a''$, $b'b''$ ist. Bei dieser Umlegung kommt das Projectionscentrum nach (C), wo die durch C' zur Spur M_1 senkrecht gezogene Gerade den Distanz-

jectionen $\beta''\gamma''$ dieser Geraden, so gibt der Schnittpunkt $\beta'\gamma'$ die Centralprojection a', und der Punkt $\beta''\gamma''$ die Orthogonalprojection a'' eines in α liegenden Punktes a. In den Verbindungsgeraden von a' und a'' mit dem unendlich fernen Punkte der Spuren und Fluchtlinien $A_1 A_2$, $B_1 B_2$, in welchem der Schnitt- und Fluchtpunkt der Geraden α vereinigt sind, ergeben sich die gesuchte Centralprojection α' und Orthogonalprojection α'' der Geraden α.

Dieselbe Hülfsconstruction kann auch angewendet werden, wenn wegen der geringen Neigung der Spuren und Fluchtlinien $A_1 A_2$ und $B_1 B_2$ die Schnittpunkte derselben zu weit fallen würden und daher die Projectionen der Schnittgeraden α sich nicht auf die gewöhnliche Weise bestimmen lassen.

Noch einfacher gestaltet sich die Lösung dieser Aufgabe durch Umlegung der durch das Projectionscentrum zu den Ebenen A und B senkrecht gelegten Ebene, deren Spur M_1 (Fig. 67b, Taf. XI) die vom Hauptpunkte C' auf $A_1 A_2$, $B_1 B_2$ gefällte Senkrechte ist. Bei dieser Umlegung kommt das Projectionscentrum nach (C), wo die durch C' zur Spur M_1 senkrecht gezogene Gerade den

kreis trifft. Die Senkrechten von a'' und b'' auf diese Spur erscheinen als die umgelegten Normalen, und die Verbindungslinien der Centralprojectionen a' und b' mit dem umgelegten Centrum (C) als die umgelegten Projectionsstrahlen der Punkte a und b; daher in den Schnittpunkten dieser Geraden die Umlegungen (a) und (b) der gegebenen Punkte sich ergeben. Die Verbindungsgerade $(a)(b)$ ist dann die Umlegung (α) der Verbindungsgeraden α, während die durch (C) zu (α) gezogene Parallele als die Umlegung des Fluchtstrahls der Geraden α erscheint. Die Schnittpunkte $\alpha_1 \alpha_2$ dieser Geraden mit der Spur M_1 der umgelegten Ebene geben die gesuchte Spur und den Fluchtpunkt der Geraden α.

Distanzkreis trifft. Die Schnittpunkte $\beta_1 \beta_2$, $\gamma_1 \gamma_2$ der Spur dieser Ebene mit den Spuren und Fluchtlinien der gegebenen Ebenen sind die Spuren und Fluchtpunkte der Schnittgeraden β und γ dieser Hülfsebene mit den Ebenen A und B. Die Verbindungsgeraden der Punkte β_2 und γ_2 mit dem umgelegten Centrum (C) geben die umgelegten Fluchtstrahlen, und die durch β_1 und γ_1 gezogenen Parallelen die Umlegungen (β) und (γ) dieser Geraden selbst. In dem Schnittpunkte (d) dieser Geraden ergibt sich daher die Umlegung des Schnittpunktes d der Schnittgeraden β und γ; die durch (d) zur Spur M_1 gefällte Senkrechte bestimmt die Orthogonalprojection d'', und die Verbindungsgerade $(C)(d)$ die Centralprojection d' dieses Schnittpunktes. Die gesuchten Projectionen α' und α'' der Geraden α gehen dann durch die entsprechenden Projectionen des Punktes d und sind zu den Spuren und Fluchtlinien der gegebenen Ebenen parallel.

2a. Schneiden sich zwei Gerade α und β in einem Punkte a, so müssen die Projectionen a', a'' desselben in den Schnittpunkten der betreffenden Projectionen $\alpha' \beta'$ und $\alpha'' \beta''$ der gegebenen Geraden liegen; die Ver-

2b. Liegen zwei Gerade α und β in einer Ebene A, so müssen die Spur und Fluchtlinie $A_1 A_2$ derselben in den Verbindungsgeraden der Spuren und Fluchtpunkte $\alpha_1 \beta_1$ und $\alpha_2 \beta_2$ der gegebenen Geraden

bindungsgerade dieser Schnittpunkte muss daher durch den Hauptpunkt gehen. Sind also $\alpha' \alpha''$, $\beta' \beta''$ (Fig. 68 a, Taf. XI) die Projectionen zweier solcher Geraden, deren Schnittpunkte $a' a''$ als die Projectionen des Schnittpunktes a der Raumgeraden erscheinen, so hat man nur Spuren und Fluchtpunkte $\alpha_1 \beta_1$ und $\alpha_2 \beta_2$ dieser Geraden zu bestimmen, um in den Verbindungsgeraden A_1 und A_2 dieser Punkte die Spur und Fluchtlinie der Verbindungsebene A der gegebenen Geraden zu erhalten. Jede Gerade γ, welche irgend zwei in den Geraden α und β liegende Punkte b und c, deren Projectionen $b' b''$, $c' c''$ in den entsprechenden Projectionen der gegebenen Geraden liegen, verbindet, liegt auch in der Verbindungsebene A dieser Geraden. Ihre Spur γ_1 und ihr Fluchtpunkt γ_2 müssen daher in A_1, beziehungsweise A_2 liegen.

Liegt der Schnittpunkt der beiden Geraden im Unendlichen, d. h. sind sie parallel, so fallen die Fluchtpunkte derselben zusammen. In diesem Falle ist nur die Spur der durchgelegten Ebene durch zwei Punkte bestimmt; doch kann die zugehörige Fluchtlinie durch den zusammenfallenden Fluchtpunkt der beiden Geraden, parallel liegen; diese Verbindungsgeraden müssen daher parallel sein. Sind also $\alpha_1 \alpha_2$, $\beta_1 \beta_2$ (Fig. 68 b, Taf. XI) Spuren und Fluchtpunkte zweier solcher Geraden, deren Verbindungslinien $A_1 A_2$ als Spur und Fluchtlinie der Verbindungsebene A der Raumgeraden erscheinen, so hat man nur die Projectionen $\alpha' \beta'$ und $\alpha'' \beta''$ dieser Geraden zu bestimmen, um in den Schnittpunkten a' und a'' dieser Geraden die Projectionen des Schnittpunktes a der gegebenen Geraden zu erhalten. Jede Gerade γ, in welcher sich irgend zwei durch die Geraden α und β gehende Ebenen B und C, deren Spuren und Fluchtlinien $B_1 B_2$, $C_1 C_2$ durch die Spuren und Fluchtpunkte der gegebenen Geraden gehen, schneiden, geht auch durch den Schnittpunkt a dieser Geraden. Ihre Projectionen γ' und γ'' müssen daher durch a', beziehungsweise a'' gehen.

Steht die Ebene der beiden Geraden auf der Projectionsebene senkrecht, so fallen die Orthogonalprojectionen derselben zusammen. In diesem Falle ist nur die Centralprojection ihres Durchschnittspunktes durch zwei Gerade bestimmt, doch kann die zugehörige Orthogonalprojection in der zusammenfallenden Orthogonal-

zu der bereits bestimmten Spur leicht gezogen werden. Ebenso fallen die Spuren der beiden Geraden zusammen, wenn ihr Durchschnittspunkt in der Projectionsebene liegt.

3a. Soll die Spur und Fluchtlinie $A_1 A_2$ (Fig. 69a, Taf. XI) der Verbindungsebene A einer durch Spur und Fluchtpunkt $\alpha_1 \alpha_2$ gegebenen Geraden α mit einem durch seine Projectionen $a' a''$ gegebenen Punkte a gefunden werden, so nimmt man in α einen Punkt b an und bestimmt Spur und Fluchtpunkt $\beta_1 \beta_2$ der Verbindungsgeraden β der Punkte a und b. Die zu einander parallelen Verbindungsgeraden $\alpha_1 \beta_1$, $\alpha_2 \beta_2$ der Spuren und Fluchtpunkte der sich schneidenden Geraden α und β geben die Spur und Fluchtlinie der gesuchten Ebene A. Um die bei dieser Construction nöthige Aufsuchung der Projectionen α' und α'' der gegebenen Geraden zu vermeiden, ist es am vortheilhaftesten, statt des willkürlich gewählten Punktes b den Durchstosspunkt d oder den unendlich fernen Punkt f der Geraden α anzunehmen; die Projectionen des ersteren Punktes fallen im Punkte α_1 zusammen, während die Centralprojection f' des Punktes f

projection der beiden Geraden aus der bereits bestimmten Centralprojection leicht gefunden werden. Ebenso fallen die Centralprojectionen der beiden Geraden zusammen, wenn ihre Ebene durch das Projectionscentrum geht.

3b. Sollen die Projectionen $a' a''$ (Fig. 69b, Taf. XI) des Schnittpunktes a einer durch ihre Projectionen $\alpha' \alpha''$ gegebenen Geraden α mit einer durch Spur und Fluchtlinie $A_1 A_2$ gegebenen Ebene A gefunden werden, so legt man durch α eine Ebene B und bestimmt die Projectionen $\beta' \beta''$ der Schnittgeraden β der Ebenen A und B. Die Schnittpunkte der entsprechenden Projectionen $\alpha' \beta'$ und $\alpha'' \beta''$ der in derselben Ebene liegenden Geraden α und β geben die gleichnamigen Projectionen des Punktes a. Um die bei dieser Construction nöthige Aufsuchung von Spur und Fluchtpunkt $\alpha_1 \alpha$ der gegebenen Geraden zu vermeiden, ist es am vortheilhaftesten, statt der willkürlich gewählten Ebene B, die durch das Projectionscentrum gehende Ebene P, oder die zur Projectionsebene senkrechte Ebene S des Ebenenbüschels α anzunehmen. Spur und Fluchtlinie der erstern Ebene fallen in der Geraden α' zusammen, während

mit α_2 zusammenfällt, seine Orthogonalprojection aber als die Richtung der Verbindungsgeraden des Hauptpunktes mit α_2 erscheint. Im ersteren Falle hat die Hülfsgerade mit der gegebenen Geraden gleiche Spur, im letztern gemeinsamen Fluchtpunkt.

Bei speciellen Lagen der gegebenen Elemente bleibt die Construction im Wesentlichen dieselbe; nur wenn der gegebene Punkt in der Projectionsebene oder in der unendlich fernen Ebene liegt, können Spur und Fluchtlinie jeder durch ihn und irgend eine durch Spur und Fluchtpunkt gegebene Gerade α gelegten Ebene unmittelbar bestimmt werden. Im erstern Falle geht die Spur A_1 jeder durch den in der Projectionsebene liegenden Punkt d gelegten Ebene durch die vereinigte Central- und Orthogonalprojection $d' d''$ desselben; während im letztern Falle die Fluchtlinie B_2 jeder Ebene, welche durch den unendlich fernen Punkt f gelegt ist, durch die Centralprojection f' dieses Punktes, dessen Orthogonalprojection f'' in der unendlich fernen Geraden der Projectionsebene liegt, gehen muss.

Ist der Punkt a nicht durch seine Projectionen, sondern

die Spur S_1 der Ebene S mit α'' zusammenfällt, die Fluchtlinie S_2 aber durch den Hauptpunkt gehen muss. Im erstern Falle hat die Hülfsgerade mit der gegebenen Geraden gleiche Central-, im letztern gemeinsame Orthogonalprojection.

Bei speciellen Lagen der gegebenen Elemente bleibt die Construction im Wesentlichen dieselbe; nur wenn die gegebene Ebene durch das Projectionscentrum geht, oder zur Projectionsebene senkrecht ist, können Central- und Orthogonalprojection des Durchschnittspunktes derselben mit irgend einer durch Central- und Orthogonalprojection gegebenen Geraden α unmittelbar bestimmt werden. Im erstern Falle liegt die Centralprojection α' jedes in der durch das Projectionscentrum gehenden Ebene P liegenden Punktes in der vereinigten Spur und Fluchtlinie $P_1 P_2$ derselben; während im letzteren Falle die Orthogonalprojection b'' jedes Punktes, welcher in der zur Projectionsebene senkrechten Ebene S liegt, in der Spur S_1 dieser Ebene, deren Fluchtlinie S_2 durch den Hauptpunkt geht, liegen muss.

Ist die Ebene A nicht durch Spur und Fluchtlinie, sondern

durch die Spuren $\beta_1\gamma_1$ und Fluchtpunkte $\beta_2\gamma_2$ zweier in derselben Ebene E liegender, daher einen Punkt bestimmender Geraden β und γ gegeben; so kann man die Spur und Fluchtlinie der Verbindungsebene A einer gegebenen dritten Geraden α mit dem Schnittpunkte der Geraden β und γ erhalten, ohne die Projectionen dieses Punktes aufsuchen zu müssen.

Zu diesem Zwecke bestimmt man nach dem Frühern die Verbindungsebenen B und C der Geraden β und γ mit dem in der Projectionsebene liegenden Punkte d der Geraden α, dessen beide Projectionen mit der Spur α_1 zusammenfallen. Die Schnittgerade δ der Ebenen B und C geht durch den Schnittpunkt der Geraden β und γ und schneidet die Gerade α in dem in der Projectionsebene liegenden Punkt d, hat also mit α eine gemeinsame Spur. Die Verbindungsebene der sich schneidenden Geraden α und δ geht daher sowohl durch den Schnittpunkt der Geraden β und γ, als auch durch die gegebene Gerade α, ist also die gesuchte Verbindungsebene A. (Fig. 70a, Taf. XI.)

Statt der Verbindungsebenen der Geraden β und γ mit dem

durch die Projectionen $\beta'\gamma'$, $\beta''\gamma''$ zweier sich in einem Punkte p schneidender, daher eine Ebene bestimmender Geraden β und γ gegeben, so kann man die Projectionen des Schnittpunktes a einer gegebenen dritten Geraden α mit der Verbindungsebene der Geraden β und γ erhalten, ohne die Spur und Fluchtlinie dieser Ebene aufsuchen zu müssen.

Zu diesem Zwecke bestimmt man nach dem Frühern die Schnittpunkte b und c der Geraden β und γ mit der durch das Projectionscentrum gehenden Ebene P der Geraden α, deren Spur und Fluchtlinie mit der Centralprojection α' zusammenfallen. Die Verbindungsgerade δ der Punkte b und c liegt in der Verbindungsebene der Geraden β und γ, und zugleich in der centralprojicirenden Ebene P der Geraden α, mit welcher sie daher gemeinsame Centralprojection α' hat. Der Schnittpunkt der in derselben Ebene liegenden Geraden α und δ liegt daher sowohl in der Verbindungsebene der Geraden β und γ, als auch in der gegebenen Geraden α, ist also der gesuchte Schnittpunkt a. (Fig. 70b, Taf. XI.)

Statt der Schnittpunkte der Geraden β und γ mit der durch

in der Projectionsebene liegenden Punkte d hätten wir eben so leicht die Verbindungsebenen dieser Geraden mit dem unendlich fernen Punkte f der Geraden α benutzen können. Die Schnittlinie dieser Ebenen hat mit der Geraden α denselben Fluchtpunkt, ist daher zu α parallel und bestimmt mit ihr die gesuchte Verbindungsebene A.

Die Aufgabe, die Verbindungslinie zweier, durch je ein Paar in einer Ebene liegender Geraden α, β und γ, δ, gegebener Punkte zu finden, kann durch zweimalige Durchführung der obigen Construction gelöst werden. Man bestimmt wie oben die Verbindungsebenen der Geraden des einen Paares mit dem durch das andere gegebenen Punkte; die Schnittlinie dieser beiden Verbindungsebenen ist die gesuchte Gerade.

4a. In der Verbindungsebene A dreier durch ihre Projectionen $m'm''$, $n'n''$, $p'p''$ (Fig. 71a, Taf. XI) gegebener Punkte liegen auch die Verbindungsgeraden $mn\,(\alpha)$, $mp\,(\beta)$ und $np\,(\gamma)$ je zweier dieser Punkte. Diese Verbindungslinien sind also ebenfalls durch ihre Projectionen, — die Verbindungslinien der entsprechenden Projectionen der gegebenen Punkte, —

das Projectionscentrum gehenden Ebene P hätten wir eben so leicht die Schnittpunkte dieser Geraden mit der zur Projectionsebene senkrechten Ebene S der Geraden α benutzen können. Die Verbindungslinie dieser Punkte hat mit der Geraden α dieselbe Orthogonalprojection und bestimmt mit ihr den gesuchten Schnittpunkt a.

Die Aufgabe, die Schnittlinie zweier, durch je ein Paar sich schneidender Geraden α, β und γ, δ, gegebener Ebenen zu finden, kann durch zweimalige Durchführung der obigen Construction gelöst werden. Man bestimmt wie oben die Durchschnittspunkte der Geraden des einen Paares mit der durch das andere gegebenen Ebene; die Verbindungslinie dieser beiden Schnittpunkte ist die gesuchte Gerade.

4b. Durch den Schnittpunkt a dreier durch Spuren und Fluchtlinien $M_1\,M_2$, $N_1\,N_2$, $P_1\,P_2$ (Fig. 71b, Taf. XI) gegebener Ebenen gehen auch die Schnittlinien $MN\,(\alpha)$, $MP\,(\beta)$ und $NP\,(\gamma)$ je zweier dieser Ebenen. Diese Schnittlinien sind also ebenfalls durch Spuren und Fluchtpunkte, — die Schnittpunkte der Spuren und Fluchtlinien der gegebenen Ebenen, —

dargestellt. In den Schnittpunkten der zusammengehörigen Central- und Orthogonalprojectionen dieser Geraden ergeben sich die Spuren α_1, β_1 und γ_1 derselben, welche in einer Geraden, in der Spur A_1 der gesuchten Verbindungsebene der gegebenen Punkte liegen müssen. Ebenso erhält man in den Schnittpunkten der Centralprojectionen dieser Geraden mit den durch den Hauptpunkt zu den Orthogonalprojectionen gezogenen Parallelen die Fluchtpunkte α_2, β_2 und γ_2, welche in der zur Spur parallelen Fluchtlinie A_2 der gesuchten Ebene liegen müssen.

dargestellt. In den Verbindungslinien der zusammengehörigen Spuren und Fluchtpunkte dieser Geraden ergeben sich die Centralprojectionen α', β' und γ' derselben, welche sich in einem Punkte, in der Centralprojection a' des gesuchten Schnittpunktes der gegebenen Ebenen schneiden müssen. Ebenso erhält man in den, durch die Spuren dieser Geraden zu den Verbindungslinien der Fluchtpunkte mit dem Hauptpunkte gezogenen Parallelen die Orthogonalprojectionen α'', β'' und γ'', welche sich in der Orthogonalprojection a'' des gesuchten Punktes schneiden müssen.

Die Lösungen der Aufgaben über die gegenseitige Bestimmung der Grundgebilde erster Stufe sind nur Wiederholungen der vorhergegangenen; sie können daher hier um so eher übergangen werden, da sie schon in der Orthogonalprojection kurz behandelt wurden.

§. 40. Ist eine Ebene A durch ihre Spur A_1 und ihre Fluchtlinie A_2, als der Träger eines ebenen Systems, und ein ausserhalb derselben gelegener Punkt a, als der Mittelpunkt eines Strahlenbündels, gegeben, so ist jedes dieser Gebilde durch das andere bestimmt, wenn das ebene System den Schnitt des Strahlenbündels durch die Ebene A, oder der Bündel den Schein des ebenen Systems vom Punkte a ergeben soll.

Sind die Projectionen eines Punktes m im ebenen Systeme gegeben, so erhält man die Projectionen des zugehörigen Strahls im Strahlenbündel, wenn man die Projectionen des ge-

Sind Spur und Fluchtlinie einer Ebene M des Strahlenbündels gegeben, so erhält man in den Schnittpunkten derselben, mit der Spur und Fluchtlinie des Trägers A des ebe-

gebenen Punktes *m* mit den Projectionen des Mittelpunktes *a* des Bündels verbindet; aus diesen Projectionen können dann Spur und Fluchtpunkt dieses Strahls auf bekannte Weise gefunden werden. Bestimmt man aber die zu zwei gegebenen Punkten des ebenen Systems zugehörigen Strahlen durch Spuren und Fluchtpunkte, so geben die Verbindungsgeraden derselben die Spur und Fluchtlinie jener Ebene des Strahlenbündels, welche der Verbindungsgeraden der gegebenen Punkte im ebenen Systeme entspricht.

nen Systems, die Spur und den Fluchtpunkt der der Ebene *M* zugehörigen Geraden des ebenen Systems, aus welchen die Projectionen dieser Geraden auf bekannte Weise gefunden werden können. Bestimmt man aber auf diese Art die Projectionen zweier Geraden des ebenen Systems, welche irgend zwei Ebenen des Strahlenbündels entsprechen, so erhält man, in den Schnittpunkten dieser Projectionen, die Projectionen jenes Punktes im ebenen Systeme, welcher der Schnittlinie der betreffenden Ebenen im Strahlenbündel entspricht.

Der Strahlenbündel wird aber, wie bekannt, durch die zwei perspectivisch collinearen Systeme I und II in der Projectionsebene dargestellt, von denen das erstere durch die Spuren, das letztere durch die Fluchtelemente der Geraden und Ebenen des Bündels gebildet wird. Ebenso dienen die Systeme 1 und 2, welche durch die Central- und Orthogonalprojectionen der Punkte und Geraden des ebenen Systems gebildet werden, zur Darstellung desselben. Da aber Strahlenbündel und ebenes System durch Schnitt- und Scheinbildung so auf einander bezogen erscheinen, dass jedem Strahl und jeder Ebene des erstern ein Punkt, bez. eine Gerade im zweiten entspricht, so muss auch jedem Punkte in den Systemen I und II, als der Spur oder dem Fluchtpunkte eines Strahls μ im Strahlenbündel, je ein bestimmter Punkt in den Systemen 1 und 2, die Central- und Orthogonalprojection des zugehörigen Punktes *m* im ebenen Systeme entsprechen. Ebenso entspricht auch jeder Geraden in den Systemen I oder II, d. i. der Spur oder Fluchtlinie einer Ebene *N* des Bündels, je eine Gerade in den Systemen 1 und 2, nämlich die Projectionen der Schnittgeraden ν der Ebene *N* des Strahlenbündels mit dem Träger *A* des ebenen Systems.

Die 4 in der Projectionsebene vereinigten ebenen Systeme I, II und 1, 2, von denen die erstern den Strahlenbündel, die letztern das ebene System darstellen, sind daher unter sich collinear, und durch die Untersuchung der Lagenbeziehungen dieser 4 Systeme ergibt sich eine rasche und bequeme Methode zur Aufsuchung der Projectionen der Punkte oder Geraden des ebenen Systems, welche gegebenen Strahlen oder Ebenen im Strahlenbündel entsprechen, und umgekehrt.

Die Gerade A_1, als Spur des Trägers A des ebenen Systems, ist zugleich ihre eigene Centralprojection, und die Spur der durch sie gehenden Ebene des Strahlenbündels; ebenso ist die Centralprojection a' des Mittelpunktes a des Strahlenbündels die Spur des durch das Projectionscentrum gehenden Strahls dieses Bündels und zugleich die Centralprojection des diesem Strahle entsprechenden Punktes d im ebenen Systeme. Die Systeme 1 und I liegen daher perspectivisch, und zwar mit der Spur A_1 als Collineationsaxe und der Centralprojection a' als Collineationscentrum.

Die Systeme 2 und I liegen gleichfalls perspectivisch und haben in A_1, welche Gerade auch ihre eigene Orthogonalprojection ist, die zugehörige Collineationsaxe. Die Orthogonalprojection a'' des Mittelpunktes des Strahlenbündels ist die Spur des zur Projectionsebene senkrechten Strahles des Bündels und zugleich die Orthogonalprojection des diesem Strahle entsprechenden Punktes s im ebenen Systeme; sie gibt daher das Collineationscentrum der beiden Systeme 2 und I.

Auf gleiche Weise ergeben sich die Systeme 1 und II als perspectivisch gelegen. In diesen Systemen erscheint nämlich a', welcher Punkt auch der Fluchtpunkt des durch das Projectionscentrum gehenden Strahls des Bündels ist, als Collineationscentrum, während sich A_2, als die Centralprojection der unendlich fernen Geraden des ebenen Systems und als Fluchtlinie der durch diese Gerade gehenden, mithin zu A parallelen Ebene P des Strahlenbündels, als Collineationsaxe beider Systeme ergibt.

Die Systeme 2 und II liegen nicht perspectivisch.

Berücksichtigt man noch die im Frühern (§. 37) entwickelte perspectivische Lage der Systeme 1 und 2 und I und II, so ergibt sich folgendes Schema:



Systeme:	I, II.	1, I.	I, 2.	II, 1.	2, II.	1, 2.
Collineationsaxe:	∞,	A_1,	A_1,	A_2	—	A_1,
Collineationscentrum:	a',	a',	a'',	a',	—	C'.

Die Aufgabe, zu irgend einem gegebenen Elemente (Punkt oder Gerade) in einem der vier Systeme das zugehörige Element in den 3 übrigen zu finden, kann nun leicht gelöst werden. Sind (Fig. 72, Taf. XII) A_1 und A_2 Spur und Fluchtlinie des Trägers des ebenen Systems, und a', a'' die Projectionen des Mittelpunktes des Strahlenbündels, so bestimmt man zunächst die Orthogonalprojection d'' und die Centralprojection s' jener Punkte in dem ebenen Systeme, die dem durch das Projectionscentrum gelegten und dem zur Projectionsebene senkrechten Strahle entsprechen, und deren andere Projectionen mit a', bez. a'' zusammenfallen, d. h. man betrachtet a' und a'' als Projectionen von Punkten der Ebene und sucht die zweiten zugehörigen Projectionen, was nach §. 37 mit Hülfe der durch diese Punkte gelegten Geraden $\alpha'\alpha''$ und $\beta'\beta''$ leicht geschehen kann. Eben so leicht findet man mit Hülfe der in ihnen angenommenen Geraden $\gamma_1\gamma_2$ und $\delta_1\delta_2$ die Spur P_1 und die Fluchtlinie D_2 jener Ebenen P und D des Strahlenbündels, welche der unendlich fernen Geraden, bez. der Spur A_1 der Ebene entsprechen, und von denen die Fluchtlinie der erstern mit A_2 und die Spur der letztern mit A_1 zusammenfallen. Man hat dann folgende einander entsprechende Punkte und Gerade in den 4 Systemen festgestellt:

I,	II,	1,	2.
a',	a',	a',	d''.
a'',	C',	s',	a''.
A_1,	D_2,	A_1,	A_1.
P_1,	A_2,	A_2,	∞.

Ist nun ein Punkt eines der vier Systeme, z. B. m', die Centralprojection eines Punktes m des ebenen Systems gegeben, so können mit Hülfe der bereits festgestellten entsprechenden Punkte leicht die zugehörigen Punkte der andern Systeme gefunden werden. Der Punkt m'', die Orthogonalprojection des Punktes m, liegt mit m' im Collineationsstrahl $m'C'$, und den Verbindungsgeraden $m'a'$ und $m's'$ entsprechen die Geraden $m''d''$ und $m''a''$, welche einander entsprechende

Gerade sich in der Collineationsaxe A_1 der Systeme 1 und 2 schneiden müssen.

Die Spur μ_1 des zugehörigen Strahls μ im Strahlenbündel ergibt sich im Durchschnitt der Collineationsstrahlen $a'm'$ der Systeme 1 I und $a''m''$ der Systeme 2 I. Der Fluchtpunkt μ_2 des Strahls μ liegt im Collineationsstrahl $a'm'$ der Systeme 1 und II und ergibt sich aus den entsprechenden Geraden $m's'$ und $\mu_2 C'$ dieser beiden Systeme, die sich in der Collineationsaxe A_2 derselben schneiden müssen. Als Probe zeigt sich der Parallelismus der einander entsprechenden Geraden $\mu_2 C'$ und $\mu_1 a''$ der Systeme 1 und 2. Auf ganz gleiche Weise erhält man diese 4 einander entsprechenden Punkte m', m'', μ_1, μ_2, wenn man von irgend einem andern derselben ausgeht.

Ist eine Gerade irgend eines der 4 Systeme, z. B. die Spur N_1 einer Ebene N des Strahlenbündels, gegeben, so findet man zunächst N_2, die Fluchtlinie dieser Ebene, durch Bestimmung der einander entsprechenden Schnittpunkte $N_1 P_1 - N_2 A_2$ und $N_1 A_1 - N_2 D_2$, welche Paare von Punkten in den durch a' gehenden Collineationsstrahlen der Systeme I und II liegen müssen. Die Centralprojection ν' der zugehörigen Geraden ν des ebenen Systems muss N_1 in der Collineationsaxe A_1 der Systeme 1 und I, und N_2 in der Collineationsaxe A_2 der Systeme 1 und II schneiden, ist daher die Verbindungsgerade der Schnittpunkte $N_1 A_1$ und $N_2 A_2$. Die Orthogonalprojection ν'' schneidet die Collineationsaxe A_1 der Systeme I und 2 in demselben Punkte mit N_1 und ergibt sich aus den entsprechenden Punkten $N_1 P_1$ und $\nu''\infty$ dieser beiden Systeme, die in einem durch a'' gehenden Collineationsstrahl liegen müssen. Als Probe erweist sich, dass der unendlich ferne Punkt der Geraden ν'' mit seinem entsprechenden im Systeme 1, nämlich dem Schnittpunkte $\nu' A_2$, in demselben durch C' gehenden Collineationsstrahl liegen muss.

Unter allen Strahlen des Bündels ist das zur Ebene A gefällte Perpendikel π durch diese Ebene selbst bestimmt. Der Fluchtpunkt π_2 desselben ist der Durchschnittspunkt der durch das Projectionscentrum zu diesem Perpendikel gezogenen Parallelen, die also ebenfalls zur Ebene A und ebenso zu der mit A parallel durch das Centrum gelegten Flucht-

ebene, deren Schnitt mit der Projectionsebene die Fluchtlinie A_2 ist, senkrecht sein muss. Um diesen Punkt π_2 zu bestimmen, denkt man sich durch das Projectionscentrum eine zu A_2 senkrechte Ebene gelegt, deren Spur die vom Hauptpunkt C' zu A_2 gezogene Senkrechte ist. Legt man diese Ebene in die Projectionsebene um, so kommt das Projectionscentrum nach (C), wo die Senkrechte zur Spur durch C' den Distanzkreis trifft. Die Verbindungslinie des umgelegten Centrums (C) mit dem Punkte γ_2, in welchem die Spur der Hülfsebene die Fluchtlinie A_2 trifft, gibt die umgelegte Schnittlinie dieser Hülfsebene mit der zu A parallelen Fluchtebene; und die durch (C) auf diese Gerade gezogene Senkrechte ist das durch das Projectionscentrum gehende, umgelegte Perpendikel. Der Schnittpunkt dieser Geraden mit der Spur der Hülfsebene ist der bei der Umlegung unverändert gebliebene Schnittpunkt mit der Projectionsebene, mithin der gesuchte Fluchtpunkt π_2 aller Perpendikel zur Ebene A. Aus π_2 lassen sich dann nach dem Frühern die zugehörigen Punkte π_1, die Spur des durch a gehenden Perpendikels, und $p'p''$, die Projectionen des Fusspunktes dieses Perpendikels in der Ebene A, leicht bestimmen.

§. 41. Die im Vorstehenden entwickelten Gesetze der Darstellung geometrischer Elemente und Grundgebilde in der Centralprojection ergeben dieselben Reciprocitätsbeziehungen, welche sich bei der Orthogonalprojection gezeigt haben. Auch hier wird die Ebene durch zwei Gerade: Spur und Fluchtlinie, der Punkt hingegen durch zwei Punkte: seine Projectionen, dargestellt, während die Gerade wieder eine doppelte Darstellung, durch zwei Gerade: ihre Projectionen, und durch zwei Punkte: Spur und Fluchtpunkt, zulässt. Die weitere Reciprocität bestimmter Lagenverhältnisse reciproker Raumgebilde gegen das Projectionssystem tritt auch hier auf, und zwar ergeben sich das Projectionscentrum und die Projectionsebene, der Hauptpunkt und die Gegenebene, die Richtung des Hauptstrahls und die unendlich ferne Ebene, sowie endlich der Hauptstrahl und die Stellung der Projectionsebene als reciprok gelegene Grundelemente, so dass wieder der Darstellung jedes geometrischen Elementes, dessen Lage durch eines dieser Grundelemente bestimmt ist, die Darstellung eines

reciproken entspricht, das durch das reciprok gelegene Grundelement in entsprechender Weise bedingt erscheint.

Bei der Darstellung solcher reciprok gelegener Elemente in der Projectionsebene erscheinen der Hauptpunkt und die unendlich ferne Gerade als reciprok entsprechend. Diese Reciprocitätsbeziehungen sind auch im Vorstehenden durch unmittelbare Nebeneinanderstellung des Bezüglichen hervorgehoben.

Maassbestimmungen.

§. 42. Die wahre Grösse einer durch ihre Projectionen gegebenen Strecke kann durch Umlegen ihrer central- oder orthogonalprojicirenden Ebene, die wahre Grösse eines durch die Projectionen oder die Spuren seiner Schenkel gegebenen ebenen Winkels durch Umlegen seiner Ebene in die Projectionsebene bestimmt werden. Es müssen daher vor Allem die Beziehungen zwischen den Projectionen eines ebenen Systems und seiner Umlegung in die Projectionsebene erörtert werden.

Sind (Fig. 73, Taf. XII) A_1 und A_2 die Spur und Fluchtlinie des Trägers des ebenen Systems, so kann nach §. 37 aus der einen willkürlich gewählten Projection jedes seiner Elemente die zugehörige andere gefunden werden. Die Umlegung dieses Systems bildet ein ebenes System in der Projectionsebene, das zu den beiden in derselben Ebene befindlichen, durch die Projectionen gebildeten Systemen ebenfalls collinear ist. Die Beziehungen zwischen der Umlegung und der orthogonalen Projection wurden bereits früher (§. 25) untersucht; diese beiden Systeme sind perspectivisch affin, und die Spur der Ebene erscheint als Affinitätsaxe, während die Richtung der Senkrechten zur Spur A_1 als unendlich fernes Collineationscentrum erscheint.

Das durch die Centralprojectionen gebildete System ist zur Umlegung ebenfalls perspectivisch gelegen. Die Punkte der Spur sind ihre eigene Centralprojection und Umlegung; daher ist A_1 auch die Collineationsaxe dieser beiden Systeme. Die Verbindungsgeraden der Centralprojectionen der Punkte des ebenen Systems mit ihren Umlegungen in der Projectionsebene, die Collineationsstrahlen der beiden Systeme, sind zugleich die Centralprojectionen der Sehnen der Kreisbögen

welche die einzelnen Punkte bei diesem Umlegen beschreiben. Da aber diese Sehnen im Raume parallel sind, so müssen sich ihre Centralprojectionen in einem Punkte, dem gemeinsamen Fluchtpunkte dieser parallelen Geraden, schneiden. Die Verbindungsgeraden der entsprechenden Punkte beider Systeme schneiden sich daher in einem Punkte, dem Collineationscentrum der perspectivischen Collineation. Um dieses Collineationscentrum, den Fluchtpunkt der erwähnten Sehnen, zu bestimmen, braucht man nur durch das Projectionscentrum eine zu diesen Sehnen parallele Gerade, (den Fluchtstrahl derselben), zu legen, welche in ihrem Schnittpunkte mit der Projectionsebene den gesuchten Fluchtpunkt ergibt. Da die durch das Projectionscentrum gehende Fluchtebene der gegebenen Ebene A, welche die Projectionsebene in der Fluchtlinie A_2 schneidet, zur gegebenen Ebene parallel ist, so müssen auch die Punkte dieser Ebene bei ihrem Umlegen in die Projectionsebene Kreisbögen beschreiben, deren Sehnen zu den durch Umlegen der Punkte der Ebene A erhaltenen parallel sind. Denkt man sich daher diese Fluchtebene sammt dem in ihr liegenden Projectionscentrum in die Projectionsebene umgelegt, so gibt die Verbindungsgerade des Projectionscentrums mit seiner Umlegung den Fluchtstrahl der parallelen Sehnen, und die Umlegung des Projectionscentrums selbst ist der gesuchte Fluchtpunkt, das Collineationscentrum der durch die Centralprojection und die Umlegung des Raumsystems gebildeten ebenen Systeme.

Der Hauptpunkt C' ist die Orthogonalprojection des Projectionscentrums; die gesuchte Umlegung desselben muss daher in der vom Hauptpunkt zur Spur A_2 der Fluchtebene gezogenen Senkrechten liegen, und die Entfernung derselben von A_2 ergibt sich wieder als die Hypotenuse des Drehungsdreiecks, dessen Katheten die Distanz, die Entfernung des Centrums von der Projectionsebene, und das Perpendikel $C'x$ vom Hauptpunkte C' bis A_2 sind. Construirt man dieses Dreieck an die eine in der Projectionsebene liegende Kathete $C'x$, so kommt der dritte Eckpunkt desselben C^* in den Distanzkreis, und die Hypotenuse C^*x auf die Senkrechte $C'x$ von x aus aufgetragen, gibt in (C) das mit der Fluchtebene umgelegte Projections-, d. i. das gesuchte Collineationscentrum.

Hat man nun dieses Collineationscentrum bestimmt, so ist es leicht, aus den Projectionen eines Punktes der Ebene die Umlegung desselben zu bestimmen. Sind $a'a''$ die Projectionen eines Punktes der Ebene, so liegt die Umlegung (a) mit der orthogonalen Projection a'' in dem zur Spur A_1 senkrechten und mit der Centralprojection a' in dem durch (C) gehenden Collineationsstrahle; in dem Schnittpunkte dieser beiden Collineationsstrahlen ergibt sich daher der umgelegte Punkt (a). Sind α' und α'' die Projectionen einer Geraden des Raumsystems, so muss die Umlegung (α) derselben mit beiden Projectionen durch denselben Punkt der Collineationsaxe A_1 gehen, und ist daher durch noch einen zweiten Punkt (m), die Umlegung eines Punktes $m'\,m''$ der gegebenen Geraden, bestimmt. Die Umlegung (α) einer Geraden α des Raumsystems kann auch aus ihrer Centralprojection α' allein bestimmt werden, wenn man berücksichtigt, dass der unendlich ferne Punkt f der Geraden seine Centralprojection in A_2, seine Umlegung aber in der unendlich fernen Geraden der Projectionsebene hat. Der Collineationstrahl $(C)f'$ muss daher nach dem unendlich fernen Punkte der Umlegung (α) gehen, d. i. zu derselben parallel sein. Zieht man also durch den Punkt, in welchem die Centralprojection α' die Collineationsaxe A_1 trifft, die Parallele zum Collineationsstrahl $(C)f'$, so ist diese die gesuchte Umlegung der Geraden α. Ebenso erhält man die gesuchte Umlegung (m) eines Punktes m der Ebene aus seiner Centralprojection m' allein, wenn man die Umlegung (α) irgend einer durch ihn gelegten Geraden α bestimmt.

Geht die Ebene A durch das Projectionscentrum, so fällt ihre Spur mit der Fluchtlinie zusammen, und die Centralprojectionen aller ihrer Punkte liegen in der Spur. Ein Punkt a (Fig. 74, Taf. XII) in dieser Ebene ist also durch die Centralprojection a' allein nicht bestimmt, da jeder Punkt des Strahls $C'a'$ als zugehörige Orthogonalprojection angenommen werden kann. Sei a'' diese angenommene Orthogonalprojection, so erhält man die Umlegung (a) des Punktes $a'a''$, wenn man die Umlegung (C) des Projectionscentrums nach dem Frühern bestimmt hat, in dem Schnittpunkte des Collineationsstrahls $(C)a'$ und der von a'' zur Spur gezogenen Senkrechten. Die Centralprojection α' jeder Geraden α der Ebene

fällt mit $A_1 A_2$ zusammen; es muss daher noch die Orthogonalprojection α'' dieser Geraden willkürlich angenommen werden, um die Gerade zu bestimmen. Ist α'' diese Orthogonalprojection, so erhält man in dem Schnittpunkte von α'' mit der vereinigten Spur und Fluchtlinie $A_1 A_2$ die Spur α_1, und in dem Punkte, wo die durch den Hauptpunkt C' zu α'' gezogene Parallele $A_1 A_2$ trifft, den Fluchtpunkt α_2 der Geraden. Die Umlegung (α) dieser Geraden geht dann wieder durch die Spur α_1 der Geraden und ist zum Collineationsstrahl $(C)\alpha_2$ parallel.

Steht die Ebene zur Projectionsebene senkrecht, so liegen die Orthogonalprojectionen aller ihrer Punkte und Geraden in der Spur und sind daher nur durch ihre Centralprojectionen bestimmbar. Bei der Aufsuchung der Umlegung des Projectionscentrums wird die eine Kathete des Drehungsdreiecks gleich Null, und die Umlegung (C) kommt daher in den Distanzkreis. Die Bestimmung der Umlegung eines Punktes und einer Geraden dieser Ebene bleibt aber im Uebrigen dem Frühern gleich. — Ist die Ebene zur Projectionsebene parallel, so gibt schon die Orthogonalprojection ihrer Punkte und Geraden ein zum Raumsysteme congruentes ebenes System in der Projectionsebene.

§. 43. Die wahre Grösse einer durch ihre Projectionen $a'b'$, $a''b''$ (Fig. 75, Taf. XII) gegebenen Strecke kann durch Umlegen ihrer central- oder orthogonalprojicirenden Ebene bestimmt werden. Spur und Fluchtlinie der centralprojicirenden Ebene der Strecke fallen mit der Centralprojection $a'b'$ derselben zusammen. Bestimmt man nach dem Frühern das Collineationscentrum (C) für diese durch das Projectionscentrum gehende Ebene, so erhält man in den Durchschnittspunkten der Collineationsstrahlen $(C)a'$ und $(C)b'$ mit den durch a'' und b'' zur Spur gezogenen Perpendikel, die umgelegten Punkte (a) und (b). Die Verbindungsstrecke dieser Punkte ist dann die gesuchte wahre Grösse der Raumstrecke. Die Spur der orthogonalprojicirenden Ebene ist die orthogonale Projection $a''b''$ der Strecke, während die Fluchtlinie dieser Ebene durch den Hauptpunkt geht. Die Umlegung des Projectionscentrums kommt für eine solche Ebene nach C^* in den Distanzkreis, und die Schnittpunkte der Collineations-

strahlen C^*a' und C^*b', mit den Senkrechten von a'' und b'' zur Spur dieser Ebene, geben wieder die Umlegungen a^* und b^* der Streckenendpunkte, die mit einander verbunden ebenfalls die wahre Grösse der Strecke bestimmen.

Ist eine unbegrenzte Gerade α, als Träger einer Punktreihe, durch ihre Spur α_1 und ihren Fluchtpunkt α_2 (Fig. 76, Taf. XII) gegeben, so erhält man in der Umlegung derselben mit einer ihrer projicirenden Ebenen, eine zu den Projectionen der Raumreihe projectivische, perspectivisch gelegene Punktreihe, in welcher, da sie mit der Reihe, deren Träger die Raumgerade ist, congruent wird, alle Strecken in wahrer Grösse erscheinen. Die Verbindungslinie von Spur und Fluchtpunkt der gegebenen Geraden gibt die Centralprojection derselben, und zugleich die vereinigte Spur und Fluchtlinie der durch sie gehenden centralprojicirenden Ebene. Bestimmt man wieder die Umlegung (C) des Projectionscentrums, so erhält man in derselben das Collineationscentrum der Centralprojection und der Umlegung der Raumreihe, d. i. denjenigen Punkt, in welchem sich die Verbindungsgeraden der entsprechenden Punkte dieser beiden Reihen schneiden. Da der unendlich ferne Punkt der Raumreihe seine Centralprojection in dem Fluchtpunkte α_2 der Geraden, seine Umlegung aber in der unendlich fernen Geraden der Projectionsebene hat, so ist die, durch den beiden Reihen gemeinsamen Punkt α_1, zum Collineationsstrahl $(C)\alpha_2$ gezogene Parallele (α) die gesuchte Umlegung der Geraden α.

Wählt man die orthogonalprojicirende Ebene der gegebenen Geraden α zur Umlegung, so ist die Verbindungsgerade des Hauptpunktes C' mit dem Fluchtpunkt α_2 die Fluchtlinie derselben. Das umgelegte Projectionscentrum kommt dann, wie bekannt, nach C^* in den Distanzkreis, in welchem Punkte sich jetzt die Verbindungsgeraden der einander entsprechenden Punkte der Centralprojection und Umlegung schneiden müssen. Die Parallele durch α_1 zum Collineationsstrahl $C^*\alpha_2$ gibt in diesem Falle die Umlegung α^* der Geraden α. — Die Gerade α kann aber auch mit jeder beliebigen andern Ebene des Ebenenbüschels, dessen Axe sie ist, in die Projectionsebene umgelegt werden. Die Fluchtlinien aller Ebenen dieses Büschels bilden jenen Strahlenbüschel, dessen Mittelpunkt der

Fluchtpunkt α_2 der gegebenen Geraden ist. Für jede beliebige solche Ebene kann man nun nach dem Frühern die Umlegung des Projectionscentrums, das Collineationscentrum für die Centralprojection und Umlegung der Raumreihe, und aus diesem die Umlegung selbst, bestimmen. Alle diese Collineationscentren liegen in der Peripherie eines Kreises, dessen Mittelpunkt α_2 ist, und dessen Radius sich am leichtesten aus der Umlegung C^* des Projectionscentrums für die orthogonalprojicirende Ebene der Geraden, welcher Punkt auch in der Peripherie dieses Kreises liegen muss, bestimmt.

Da die Punkte C', C^* und α_2 die Eckpunkte eines rechtwinkligen Dreiecks bilden, so erscheint der Radius des erwähnten Kreises, d. i. des geometrischen Ortes aller dieser Collineationscentren, als die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Katheten die Distanz und der Abstand des Fluchtpunktes vom Hauptpunkte sind; oder gleich der Länge des Fluchtstrahls der gegebenen Geraden zwischen Projectionscentrum und Fluchtpunkt. Nimmt man in dem Umfange dieses Kreises einen Punkt C_1 (Fig. 77, Taf. XII) willkürlich als Collineationscentrum an, und bestimmt sich die zugehörige Umlegung (α), welche durch α_1 parallel zum Collineationsstrahl $C_1 \alpha_2$ gelegt ist, so erhält man in derselben alle Strecken, deren Centralprojection z. B. $a'b'$ gegeben ist, in wahrer Grösse, wenn man die Schnittpunkte (a) und (b) der Collineationsstrahlen $C_1 a'$ und $C_1 b'$ mit der gefundenen Umlegung (α) aufsucht.

Eben so leicht lassen sich jetzt die Aufgaben: auf die Gerade α von einem bestimmten Punkte aus die Centralprojectionen von Strecken von gegebener Länge aufzutragen, oder eine durch ihre Centralprojection gegebene Strecke in gleiche Theile zu theilen, etc., lösen. Man nennt daher diese Collineationscentren auch die Theilungspunkte der gegebenen Geraden in Beziehung auf die durch α_1 gehenden Umlegungen derselben, und den Kreis, in dem sie liegen, den Theilungskreis der Geraden.

Die Centralprojection der Reihe im Raume bildet mit dieser, und daher auch mit ihrer Umlegung eine projectivische Punktreihe in perspectivischer Lage. Die Maassbeziehung zwischen einander entsprechenden Strecken beider Reihen ist

aber nicht mehr die der einfachen Proportionalität, wie bei der orthogonalen Projection. Die beiden durch die Centralprojection und die Umlegung gebildeten Punktreihen schneiden sich in der Spur α_1 der Geraden, die als ein entsprechender Punkt beider Reihen erscheint, da sie die Centralprojection und Umlegung des in der Projectionsebene liegenden Punktes der Raumreihe ist. Von den zwei Punkten beider Reihen, welche je dem unendlich fernen Punkte der andern entspricht, ist der eine bereits bekannt. Der Fluchtpunkt α_2 ist nämlich die Centralprojection f' des unendlich fernen Punktes f der Raumreihe, dessen Umlegung ebenfalls im Unendlichen liegt. Zieht man den zur Centralprojection α' parallelen Collineationsstrahl $C_1(g)$, so erhält man den Punkt (g) der Umlegung, welcher dem unendlich fernen Punkte der Centralprojection entspricht, d. i. die Umlegung des in der Gegenebene befindlichen Punktes der Raumreihe. Die Punkte f' und (g), von welchen jeder dem unendlich fernen Punkte der andern Reihe entspricht, heissen die Gegenpunkte beider Reihen.

Sind (a) und a' irgend zwei einander entsprechende Punkte beider Reihen, so ergibt sich aus den ähnlichen Dreiecken $(g)C_1(a)$ und $f'C_1a'$ die Proportion:

$$(g)(a) : (g)C_1 = f'C_1 : a'f';$$

und daraus die Gleichung:

$$(g)(a) \cdot a'f' = (g)C_1 \cdot f'C_1;$$

d. h. das Product der Abstände zweier entsprechender Punkte beider Reihen, von den Gegenpunkten derselben, ist constant.

Dieses constante Product $C_1f' \cdot C_1(g)$ in das Quadrat einer Strecke q verwandelt, und daher mit q^2 bezeichnet, heisst die projectivische Potenz der beiden Reihen.

Zwei entsprechende Punktepaare $(a)a'$, $(b)b'$ dieser projectivischen Reihen geben die Gleichungen:

$$f'a' = \frac{q^2}{(g)(a)}; \qquad f'b' = \frac{q^2}{(g)(b)};$$

von einander subtrahirt erhält man:

$$\pm(a'f' - b'f') = \pm[(g)(b) - (g)(a)] \cdot \frac{q^2}{(g)(a) \cdot (g)(b)};$$

oder

$$a'b' = (a)(b) \cdot \frac{q^2}{(g)(a) \cdot (g)(b)}.$$

Da aber die Strecken in der Umlegung den entsprechenden Strecken im Raume gleich sind, hat man den Lehrsatz:

Die Centralprojection einer Strecke ist gleich dem Producte der Strecke im Raume mit dem Quotienten der projectivischen Potenz durch das Product der Abstände beider Endpunkte der Strecke von ihrem Gegenpunkte.

§. 44. Ist ein ebener Winkel durch die Projectionen $\alpha', \alpha'', \beta', \beta''$ (Fig. 78, Taf. XII) seiner sich in dem Scheitel a schneidenden Schenkel gegeben, so kann man leicht die Spuren α_1, β_1 und die Fluchtpunkte α_2, β_2 der Schenkel bestimmen. Die Verbindungsgeraden dieser Punkte geben die Spur und Fluchtlinie der Winkelebene. Bestimmt man jetzt die Umlegung (a) des Scheitels, mit Hülfe des umgelegten Projectionscentrums (C), und verbindet die bei dem Umlegen ungeändert gebliebenen Spuren α_1 und β_1 mit dem umgelegten Punkte (a), so erhält man den mit seiner Ebene in die Projectionsebene umgelegten, mithin in wahrer Grösse befindlichen Winkel. — Die beiden durch das Projectionscentrum gehenden Fluchtstrahlen der Schenkel sind zu diesen selbst parallel, schliessen daher einen dem gegebenen gleichen Winkel ein.

Die Verbindungsgeraden des mit der Fluchtebene umgelegten Projectionscentrums (C), mit den Spuren α_2 und β_2 der Fluchtstrahlen der Winkelschenkel, geben die umgelegten Fluchtstrahlen dieser Geraden; und der Winkel, den sie einschliessen, ist ebenfalls die wahre Grösse des Winkels der gegebenen Geraden α und β.

§. 45. Um den Neigungswinkel zweier durch ihre Spuren A_1, B_1 (Fig. 79, Taf. XII) und ihre Fluchtlinien A_2, B_2 gegebener Ebenen zu bestimmen, sucht man zunächst die Schnittlinie α derselben. Der Schnittpunkt α_1 der Spuren gibt die Spur, der Schnittpunkt α_2 der Fluchtlinien der gegebenen Ebenen den Fluchtpunkt dieser Geraden. Die Neigungswinkelebene P muss auf dieser Geraden senkrecht stehen; da aber alle auf dieser Geraden senkrechten Ebenen zu einander parallel sind, so haben sie eine gemeinsame Fluchtlinie P_2, die zunächst bestimmt werden muss. Diese Fluchtlinie ist die Spur der durch das Projectionscentrum gehenden Parallelebene (Fluchtebene) zu P, welche Ebene also auf dem ebenfalls durch das Projectionscentrum gehenden Fluchtstrahl der Geraden α senkrecht steht. Ihre Spur P_2 muss daher auf der Orthogonalprojection dieses Fluchtstrahls, als welche

die Verbindungsgerade des Fluchtpunktes α_2 mit dem Hauptpunkte C' erscheint, senkrecht sein. Die durch diesen Fluchtstrahl gelegte orthogonalprojicirende Ebene, deren Spur die Orthogonalprojection $\alpha_2 C'$ desselben ist, schneidet die Fluchtebene der Ebene P in einer Geraden, die durch das Projectionscentrum geht, und auf dem Fluchtstrahle der Geraden α senkrecht ist; der Schnittpunkt dieser Geraden mit der Projectionsebene gibt dann einen Punkt der gesuchten Fluchtlinie P_2. Legt man diese durch das Projectionscentrum gehende orthogonalprojicirende Ebene in die Projectionsebene um, so kommt das Centrum nach C^*, wo die Senkrechte von C' zur Spur $C'\alpha_2$ den Distanzkreis trifft. Die Verbindungslinie des umgelegten Centrums C^* mit dem Fluchtpunkte α_2 der Geraden α gibt den umgelegten Fluchtstrahl dieser Geraden, und die in C^* darauf Senkrechte, die umgelegte Schnittlinie der Fluchtebene der Ebene P mit der orthogonalprojicirenden Ebene des Fluchtstrahls. Der Punkt x, wo diese Gerade die Spur $C'\alpha_2$ der umgelegten Ebene schneidet, ist der bei der Umlegung unverändert gebliebene Schnittpunkt derselben mit der Projectionsebene, durch welche die gesuchte Fluchtlinie P_2 gehen muss. Hat man auf diese Weise die Fluchtlinie P_2 der Neigungswinkelebene bestimmt, so kann man die Spur P_1 derselben beliebig, parallel zu P_2 annehmen; bestimmt man dann die Schnittlinien β und γ der Ebene P mit den gegebenen Ebenen A und B, welche sich in einem Punkte a, dem Scheitel des Neigungswinkels, schneiden und sucht nach dem vorhergehenden §. die wahre Grösse des in der Ebene P liegenden, von den Geraden β und γ gebildeten Winkels, so ist dieser der gesuchte Neigungswinkel. Die Fluchtstrahlen der beiden Schenkel β und γ des Neigungswinkels sind zugleich die Schnittlinien der Fluchtebene der Neigungswinkelebene mit den Fluchtebenen der beiden gegegebenen Ebenen A und B; sie schliessen daher den Neigungswinkel dieser Fluchtebenen ein, der mit dem der gegebenen Ebenen gleich sein muss.

Will man den Neigungswinkel einer Ebene A mit der Projectionsebene bestimmen, so ist die Neigungswinkelebene P (Fig. 80, Taf. XIII) in diesem Falle senkrecht zur Projectionsebene; ihre Fluchtlinie P_2 geht daher durch den Haupt-

punkt. Da sie aber gleichzeitig senkrecht auf der Ebene A ist, so sind ihre Spur und Fluchtlinie auf A_1 und A_2 senkrecht. Zieht man daher P_1 und P_2, Spur und Fluchtlinie dieser Ebene, von denen die letztere bestimmt ist, die erstere beliebig parallel zu P_2 gezogen werden kann, und sucht die Schnittlinie β dieser Ebene mit der gegebenen Ebene A; so schliesst diese Gerade β mit der Spur P_1 den gesuchten Neigungswinkel ein. Legt man dann die Gerade β mit der Ebene P nach (β) in die Projectionsebene um, so erhält man die wahre Grösse des Neigungswinkels. Die durch das Projectionscentrum gehende, zu A parallele Fluchtebene, deren Schnitt mit der Projectionsebene die Fluchtlinie A_2 der gegebenen Ebene ist, schliesst mit der Projectionsebene denselben Neigungswinkel ein. Fällt man daher vom Hauptpunkte C' die Senkrechte auf A_2, welche dieselbe in β_2 trifft, so ist im rechtwinkligen Dreieck $(C)C'\beta_2$, x der Neigungswinkel der Fluchtebene, mithin auch der der Ebene A. Alle Ebenen, deren Fluchtlinien einen Kreis berühren, der den Hauptpunkt zum Mittelpunkt hat, haben daher gleiche Neigung gegen die Projectionsebene; man nennt deshalb solche Kreise N e i g u n g s k r e i s e, und zwar ist der Neigungswinkel $x \gtreqless 45^0$, je nachdem der Radius des Neigungskreises $\lesseqgtr$ als die Distanz ist.

§. 46. Soll der Abstand eines durch seine Projectionen $a'a''$ (Fig. 81, Taf. XIII) gegebenen Punktes a, von einer, durch die Spur α_1 und den Fluchtpunkt α_2 gegebenen Geraden α bestimmt werden; so muss man zunächst die Spur und Fluchtlinie der durch den Punkt a und die Gerade α bestimmten Ebene A auffinden, was nach §. 39, 3a, am leichtesten mit Hülfe einer durch a gehenden und zu α parallelen Geraden β, die also mit α gleichen Fluchtpunkt hat, geschehen kann. Sind A_1 und A_2 Spur und Fluchtlinie dieser Ebene, und bestimmt man sich mit Hülfe des umgelegten Projectionscentrums (C) die Umlegungen der in der Ebene A befindlichen Geraden α und β und des Punktes a, so gibt die Länge des von (a) zu (α) gezogenen Perpendikels $(a)(b)$ den gesuchten Abstand. Bestimmt man dann aus der Umlegung (b) des Fusspunktes b dieses Perpendikels die Pro-

jectionen b' und b'' dieses Punktes, so erhält man in $a'b', a''b''$ die Projectionen der vom Punkte a zu α gezogenen Senkrechten. Der Punkt b ergibt sich auch als der Durchschnittspunkt der Geraden α mit der durch den Punkt a senkrecht zu α gelegten Ebene P. Die Fluchtlinie P_2 (Fig. 82, Taf. XIII) dieser Ebene kann nach §. 44 aus dem Fluchtpunkte α_2 der gegebenen Geraden bestimmt werden, und um die Spur P_1 derselben aufzufinden, denkt man sich durch den Punkt a eine Gerade μ in dieser Ebene gezogen. Die Centralprojection μ' ist eine beliebige durch a' gezogene Gerade, und der Schnittpunkt derselben mit der Fluchtlinie P_2 der Ebene P gibt den Fluchtpunkt μ_2 der Hülfsgeraden μ. Die Orthogonalprojection μ'' geht durch die gleichnamige Projection a'' des Punktes a, und ist zur Verbindungsgeraden $\mu_2 C'$ parallel; der Schnittpunkt der Central- und Orthogonalprojection, μ' und μ'', dieser Geraden gibt, wie bekannt, die Spur μ_1 derselben, durch welche die Spur P_1, parallel zu P_2, gezogen werden kann. Die Projectionen b', b'' des Punktes b findet man jetzt als die Projectionen des Durchschnittspunktes der Geraden α mit der Ebene P auf bekannte Weise, und die wahre Grösse $(a)(b)$ der durch ihre Projectionen bestimmten Strecke ab, welche man durch Umlegung der Ebene P erhält, ist der gesuchte Abstand.

§. 47. Um den Neigungswinkel einer Geraden α mit einer durch ihre Spur A_1 und ihre Fluchtlinie A_2 (Fig. 83, Taf. XIII) gegebenen Ebene A zu finden, muss man durch die gegebene Gerade α eine zur Ebene A senkrechte Ebene B legen. Alle zur Ebene A senkrechten Ebenen gehen aber durch die Richtung der Perpendikel auf diese Ebene; bestimmt man daher nach §. 40 den Fluchtpunkt π_2 der Perpendikel zur Ebene A, so gibt die Verbindungsgerade des Fluchtpunktes α_2 der gegebenen Geraden α mit π_2, die Fluchtlinie B_2 der durch α senkrecht zu A gelegten Ebene B; die Spur B_1 dieser Ebene ist zu B_2 parallel und muss durch α_1 gehen. Die Schnittlinie β der Ebenen A und B ist nun die Orthogonalprojection der Geraden α auf die Ebene A, und schliesst daher mit α den gesuchten Neigungswinkel ein. Legt man also die Ebene B sammt den in ihr enthaltenen Geraden α und β in die Projectionsebene um, so erhält man den ge-

suchten Neigungswinkel x. Der Winkel y, den die Gerade α, oder irgend eine zu ihr Parallele mit einem Perpendikel zur Ebene A einschliesst, ist zum Neigungswinkel complementär. Legt man daher die Ebene der beiden durch das Projectionscentrum gehenden Fluchtstrahlen, der gegebenen Geraden α und der Perpendikel zur Ebene A, deren Spur die Verbindungsgerade der beiden Fluchtpunkte α_2 und π_2 ist, in die Projectionsebene um, wobei die Umlegung des Centrums nach (C) kömmt; so schliessen die umgelegten Fluchtstrahlen $(C)\alpha_2$ und $(C)\pi_2$ diesen complementären Winkel y ein. Errichtet man dann im Scheitel (C) dieses Winkels die Senkrechte auf den einen Schenkel $(C)\pi_2$, so bildet diese mit dem andern Schenkel $(C)\alpha_2$ den Neigungswinkel x.

Der Neigungswinkel einer Geraden α (Fig. 84, Taf. XIII) mit der Projectionsebene kann erhalten werden, wenn man die Gerade mit ihrer orthogonalprojicirenden Ebene in die Projectionsebene umlegt; ihre Umlegung (α) schliesst dann mit der Orthogonalprojection α'' den gesuchten Neigungswinkel x ein. Legt man statt der Geraden α selbst, den zu ihr parallelen, durch das Projectionscentrum gehenden Fluchtstrahl in die Projectionsebene um, so kommt das Projectionscentrum nach (C) in den Distanzkreis, und $(C)\alpha_2$ ist der umgelegte Fluchtstrahl, der mit seiner Orthogonalprojection $C'\alpha_2$ den Neigungswinkel x einschliesst. Man hat daher wieder: Alle Geraden, deren Fluchtpunkte in der Peripherie eines Neigungskreises liegen, sind gegen die Projectionsebene gleich geneigt, und zwar ist ihr Neigungswinkel $\gtreqless 45^0$, je nachdem der Radius des Neigungskreises $\lesseqgtr$ als die Distanz ist.

§. 48. Der Abstand eines Punktes a von einer Ebene A wird erhalten, wenn man durch den Punkt a eine zur Ebene senkrechte Gerade legt, und den Durchschnittspunkt derselben mit der Ebene bestimmt.

Sind (Fig. 85, Taf. XIII) $A_1 A_2$ die Spur und Fluchtlinie der gegebenen Ebene, so findet man nach bekannter Construction in π_2 den Fluchtpunkt und, durch die entsprechenden Projectionen des Punktes a gehend, in $\pi'\pi''$ die Projectionen des zu ziehenden Perpendikels, von denen die letztere auf

der Spur A_1 der Ebene senkrecht steht. Bestimmt man nun die Projectionen $d'd''$ des Durchschnittspunktes dieses Perpendikels mit der Ebene A, so hat man in $a'd'$, $a''d''$ die Projectionen, und wenn man diese Strecke etwa mit ihrer orthogonalprojicirenden Ebene in die Projectionsebene umlegt, in dieser Umlegung $(a)(d)$ die wahre Grösse des gesuchten Abstandes. — Auf gleiche Weise findet man den Abstand zweier Parallelebenen, wenn man ein Perpendikel auf beide zieht, und die wahre Grösse der Strecke zwischen den Durchschnittspunkten dieses Perpendikels mit beiden gegebenen Ebenen bestimmt.

§. 49. Zwei durch ihre Spuren $\alpha_1 \beta_1$ und ihre Fluchtpunkte $\alpha_2 \beta_2$ gegebene Gerade α und β liegen nicht in einer Ebene, wenn die Verbindungslinien ihrer Fluchtpunkte und Spuren nicht parallel sind; sucht man Central- und Orthogonalprojectionen dieser Geraden, so werden auch die Schnittpunkte derselben nicht als Projectionen desselben Raumpunktes erscheinen.

Die Verbindungsgerade der Fluchtpunkte der beiden Geraden ist die gemeinsame Fluchtlinie des durch diese Geraden bestimmten Parallelebenenpaares A und B, und die durch α_1 und β_1 zu ihr gezogenen Parallelen geben die Spuren A_1 und B_1 der beiden Ebenen dieses Paares. Um den Abstand der gegebenen Geraden α und β zu bestimmen, nimmt man in einer derselben, z. B. α (Fig. 86, Taf. XIII), den Punkt $a'a''$ an und zieht durch denselben das Perpendikel π zur Ebene B. Sind $\pi' \pi''$ die Projectionen und $\pi_1 \pi_2$ Spur und Fluchtpunkt desselben, die auf gleiche Weise wie in der vorigen Aufgabe erhalten werden, so bestimmt man dann in $b'b''$ die Projectionen des Durchschnittspunkte dieses Perpendikels mit der Ebene B. Zieht man hierauf noch durch $b'b''$ die Parallele γ zur Geraden α (Orthogonalprojection γ'' parallel zu α'', Centralprojection γ' durch den gemeinsamen Fluchtpunkt α_2), welche die gegebene Gerade β in dem Punkte $d'd''$ schneidet, und zieht durch diesen Punkt eine Parallele $\delta' \delta''$ zum Perpendikel π, so schneidet diese Gerade die gegebene Gerade in dem Punkte $f'f''$. Die wahre Grösse der durch ihre Projectionen $d'f'$, $d''f''$ bestimmten Strecke df ist dann der gesuchte Abstand der beiden sich kreuzenden

Geraden α und β. Handelt es sich blos um die Bestimmung der Grösse dieses Abstandes, so ist es hinreichend, wenn man nach der vorigen Aufgabe den Abstand der beiden Parallelebenen A und B bestimmt.

Sind $\alpha_1\beta_1$ (Fig. 87a, Taf. XIII) die Spuren und $\alpha_2\beta_2$ die Fluchtpunkte zweier sich kreuzender Geraden, und $a'a''$ die Projectionen eines in keiner dieser Geraden liegenden Punktes, und soll die Gerade γ gesucht werden, welche durch den Punkt a geht und beide gegebenen Geraden schneidet, so bestimmt man zunächst nach §. 39, 3a, mit Hülfe der zwei durch a gehenden und zu α und β parallelen Geraden δ und ε die Spuren A_1B_1 und die Fluchtlinien A_2B_2 der Ebenen A und B, welche den Punkt a mit den gegebenen Geraden α und β verbinden. Die Schnittlinie γ dieser beiden Ebenen ist die gesuchte Gerade, welche, wenn man ihre Projectionen $\gamma'\gamma''$ aufsucht, mit den Projectionen $\alpha'\alpha''$, $\beta'\beta''$ der gegebenen Geraden die Projectionen $b'b''$, $d'd''$ der Schnittpunkte b und d ergeben muss.

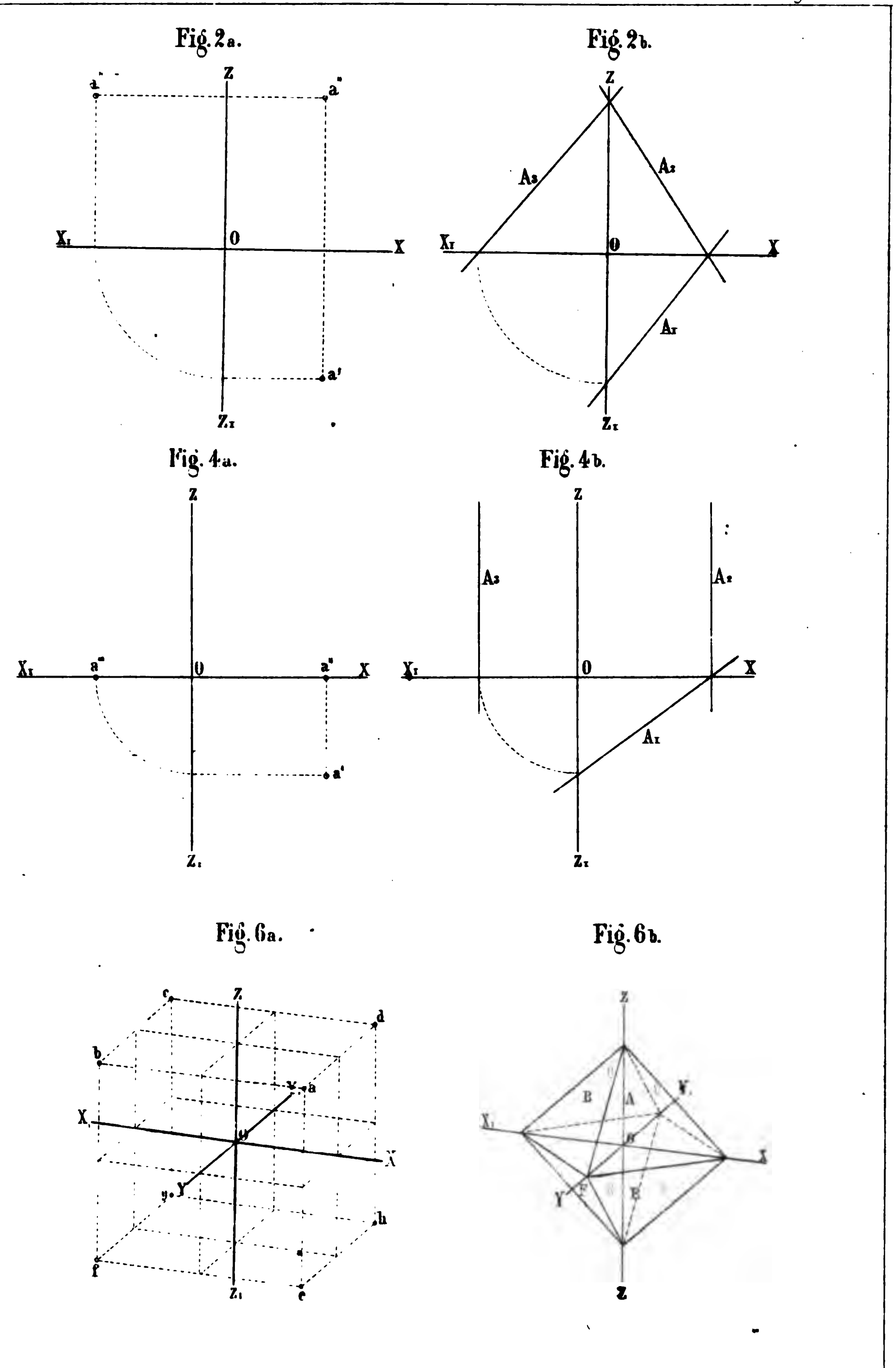
Sind $\alpha'\beta'$ (Fig. 87b, Taf. XIII) die Central- und $\alpha''\beta''$ die Orthogonalprojectionen zweier sich kreuzender Geraden, A_1A_2 Spur und Fluchtlinie einer durch keine dieser Geraden gehenden Ebene, und soll die Gerade γ gesucht werden, welche in der Ebene A liegt und beide gegebenen Geraden schneidet, so bestimmt man zunächst nach §. 39, 3b, mit Hülfe der zwei in A liegenden und mit α und β in derselben orthogonalprojicirenden Ebene befindlichen Geraden δ und ε die Projectionen $a'a''$, $b'b''$ der Punkte a und b, in welchen die Ebene A von den gegebenen Geraden α und β geschnitten wird. Die Verbindungslinie γ dieser beiden Punkte ist die gesuchte Gerade, welche, wenn man Spur γ_1 und Fluchtpunkt γ_2 derselben aufsucht, mit den Spuren $\alpha_1\beta_1$ und Fluchtpunkten $\alpha_2\beta_2$ der gegebenen Geraden die Spuren B_1D_1 und Fluchtlinien B_2D_2 der Verbindungsebenen B und D ergeben muss.

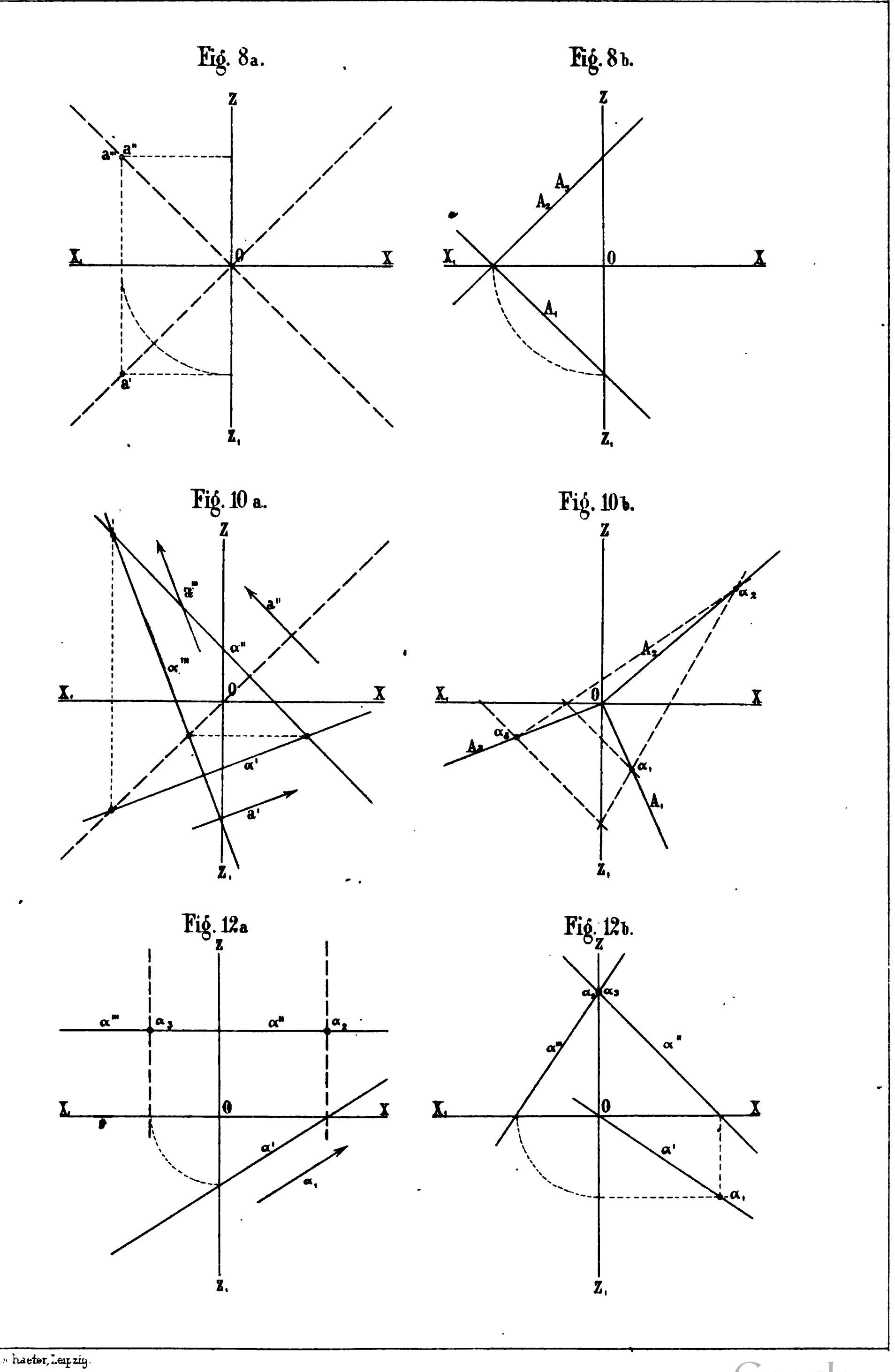
Das zwei sich kreuzende Gerade schneidende Perpendikel kann nach dem Vorhergehenden auch als die Schnittlinie derjenigen Ebenen gefunden werden, welche jede der gegebenen Geraden mit der Richtung der Perpendikel auf dem durch die Geraden bestimmten Parallelebenenpaare ver-

binden. Sind also wieder $\alpha_1 \beta_1$ (Fig. 88, Taf. XIII) die Spuren und $\alpha_2 \beta_2$ die Fluchtpunkte zweier sich kreuzender Geraden, ferner π_2 der Fluchtpunkt der Perpendikel zu den nach dem Frühern bestimmten Ebenen M, N des Parallelebenenpaares, so ist π_2 zugleich die Centralprojection f' des unendlich fernen Punktes, durch welchen das gesuchte Perpendikel auf beiden gegebenen Geraden gehen muss; die Orthogonalprojection f'' dieses Punktes ist die Richtung der Verbindungsgeraden $C' f'$. Die Fluchtlinien $A_2 B_2$ der Verbindungsebenen A und B des unendlich fernen Punktes f mit den gegebenen Geraden α und β ergeben sich als die Verbindungslinien der Centralprojection $f'(\pi_2)$ dieses Punktes mit den Fluchtpunkten α_2 und β_2 der gegebenen Geraden; die Spuren $A_1 B_1$ dieser Geraden gehen durch α_1 und β_1. Die Schnittlinie γ der Ebenen A und B ist dann das gesuchte Perpendikel, und bestimmt man die Projectionen $b' b''$ und $d' d''$ der Schnittpunkte b und d der Geraden γ mit den gegebenen Geraden α und β, so erhält man in $b' d'$, $b'' d''$ die Projectionen des Abstandes der gegebenen, sich kreuzenden Geraden, aus welchen man die wahre Grösse desselben leicht bestimmen kann.

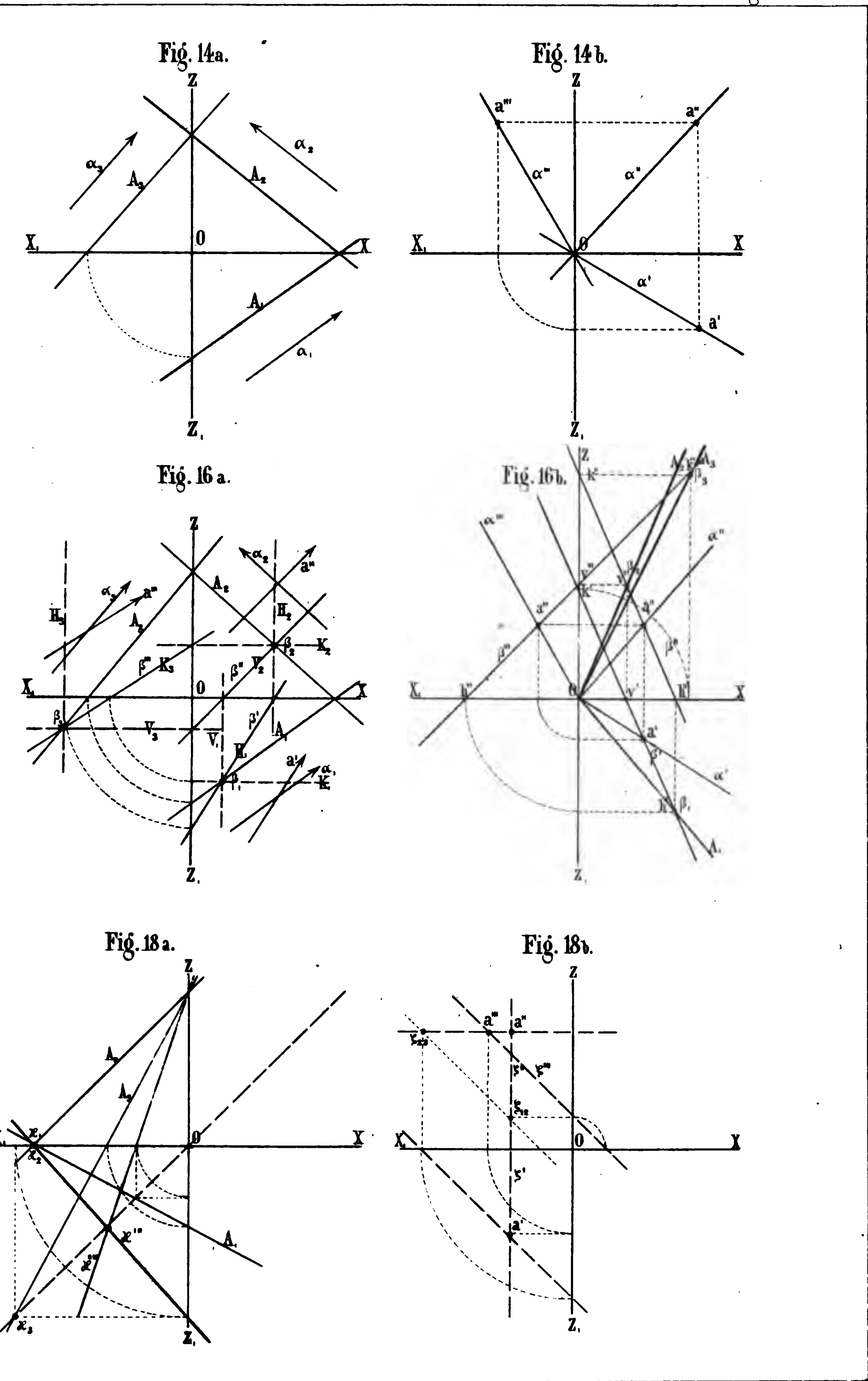
Berichtigungen.

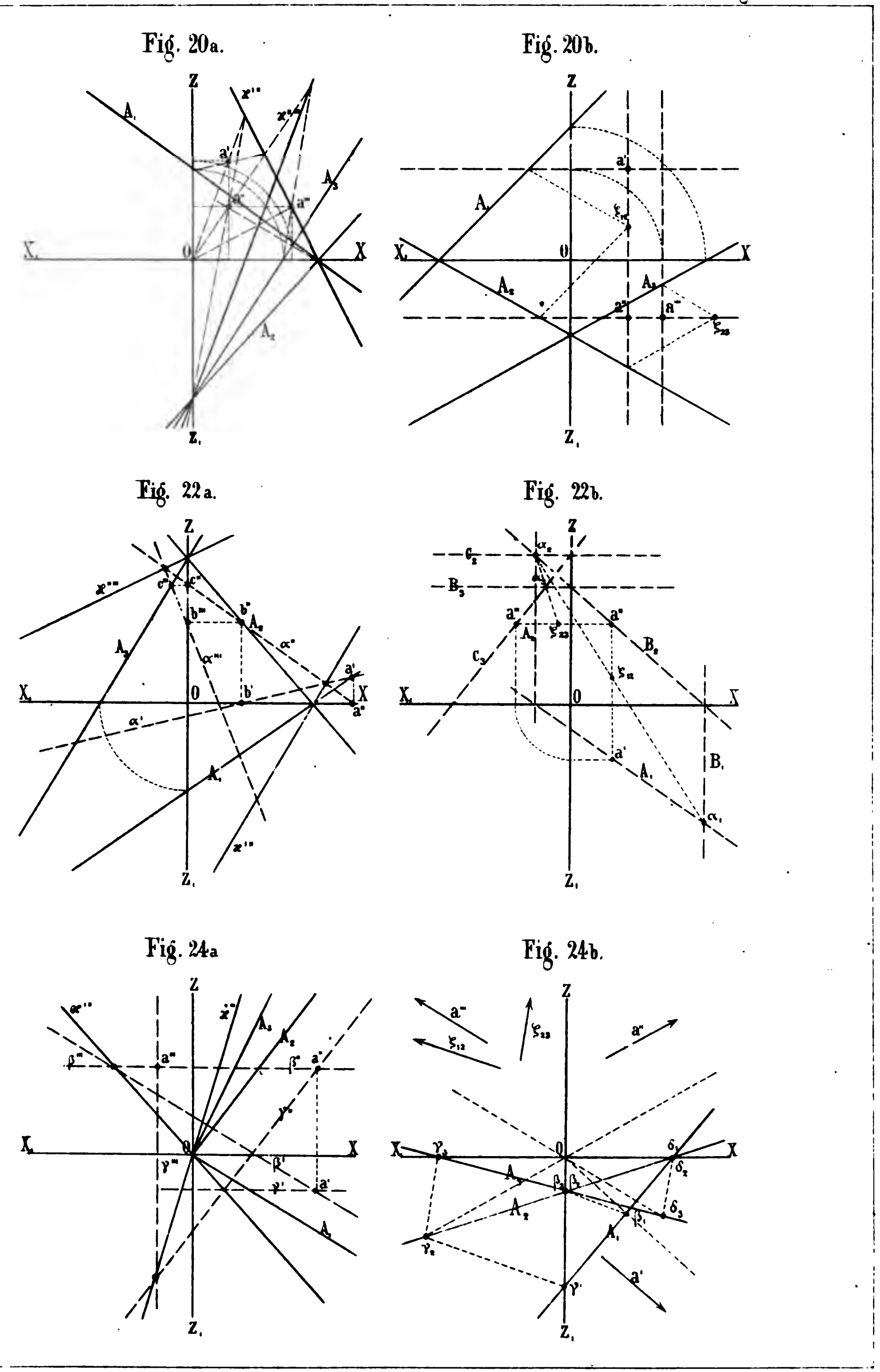
Seite 27 Zeile 17 von unten rechts und links statt „Vertical" zu setzen „Kreuzriss".
„ 50 Zeile 18 von oben, rechts, zwischen den Wörtern legt, zu „und" einzuschalten.
„ 57 ist in der Seitenüberschrift „§. 17" wegzulassen.
„ 80 ist in der Seitenüberschrift statt §. 21 „§. 22" zu setzen.

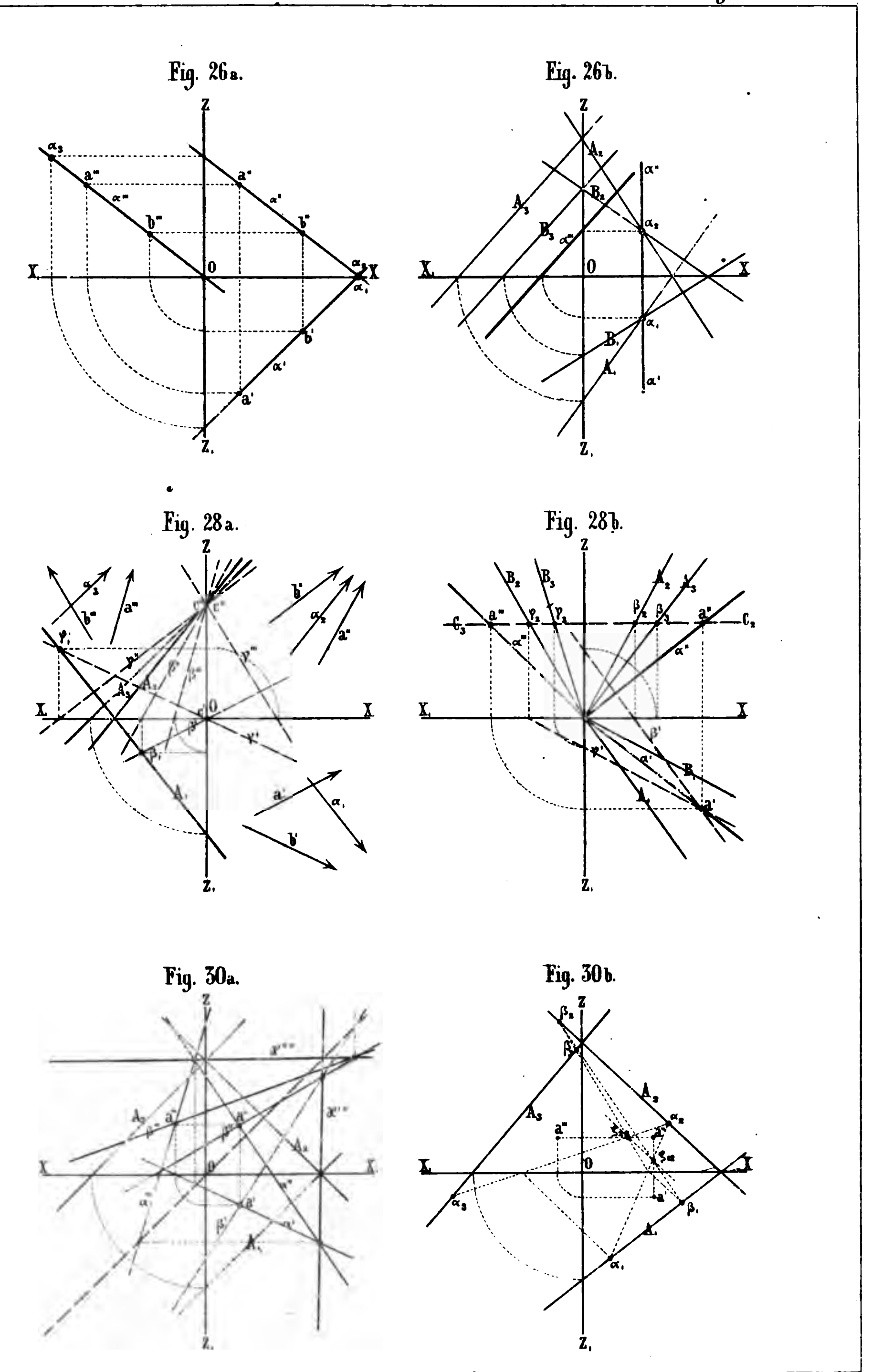

Fig. 2a.
Z
a'''
a''
X1
0
X
a'
Z1
Fig. 2b.
Z
A3
A2
X1
0
X
A1
Z1
Fig. 4a.
Z
X1
a'''
0
a''
X
a'
Z1
Fig. 4b.
Z
A3
A2
X1
0
X
A1
Z1
Fig. 6a.
c
Z
d
b
a
X1
0
X
y
Y
h
f
Z1
e
Fig. 6b.
Z
B
A
Y1
X1
0
X
Y
F
B
Z



haeter, Leipzig.


Fig. 14a.
Fig. 14b.
Fig. 16a.
Fig. 16b.
Fig. 18a.
Fig. 18b.


Fig. 20a.
Fig. 20b.
Fig. 22a.
Fig. 22b.
Fig. 24a
Fig. 24b.


Fig. 26a.
Fig. 26b.
Fig. 28a.
Fig. 28b.
Fig. 30a.
Fig. 30b.

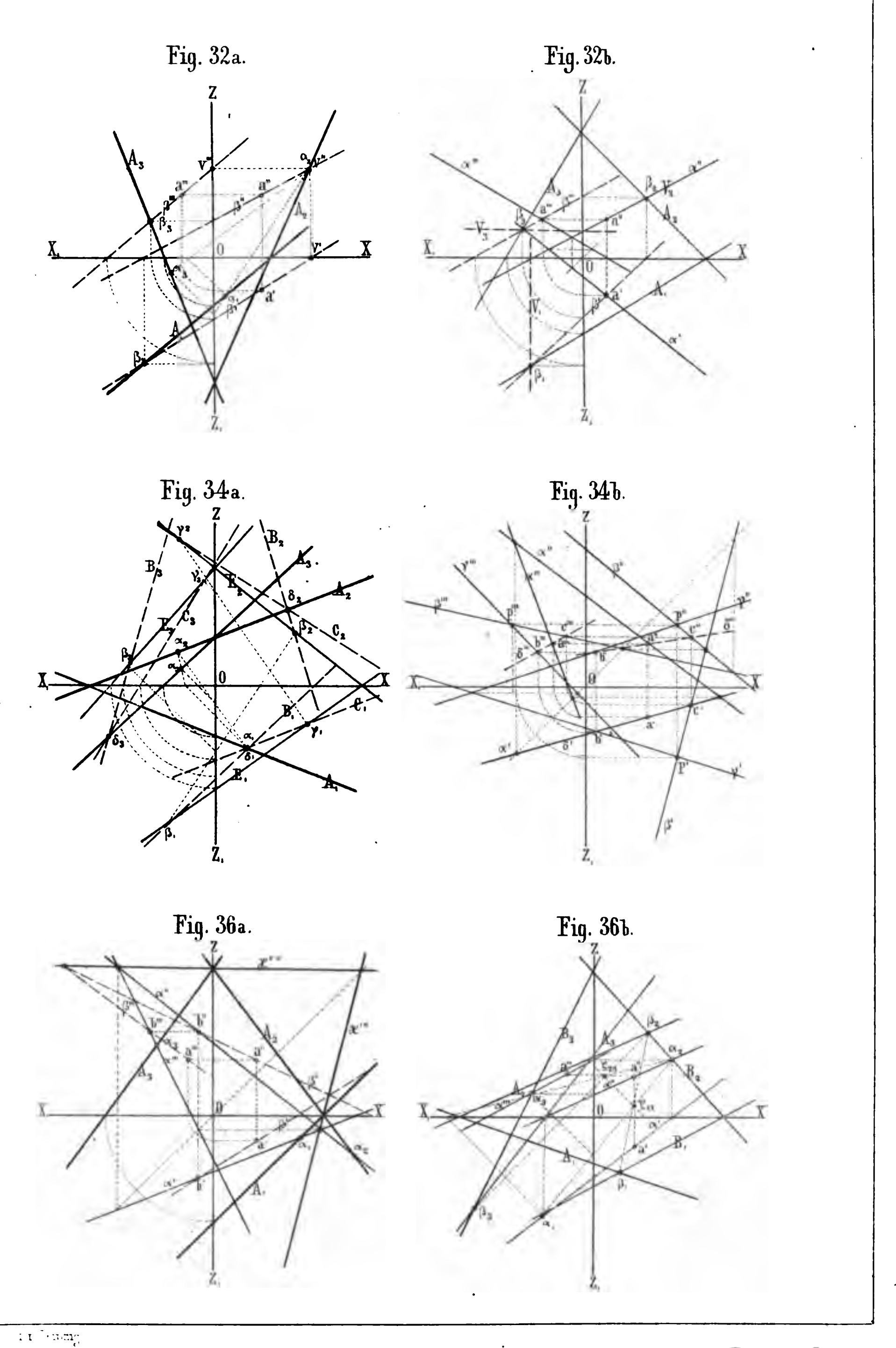
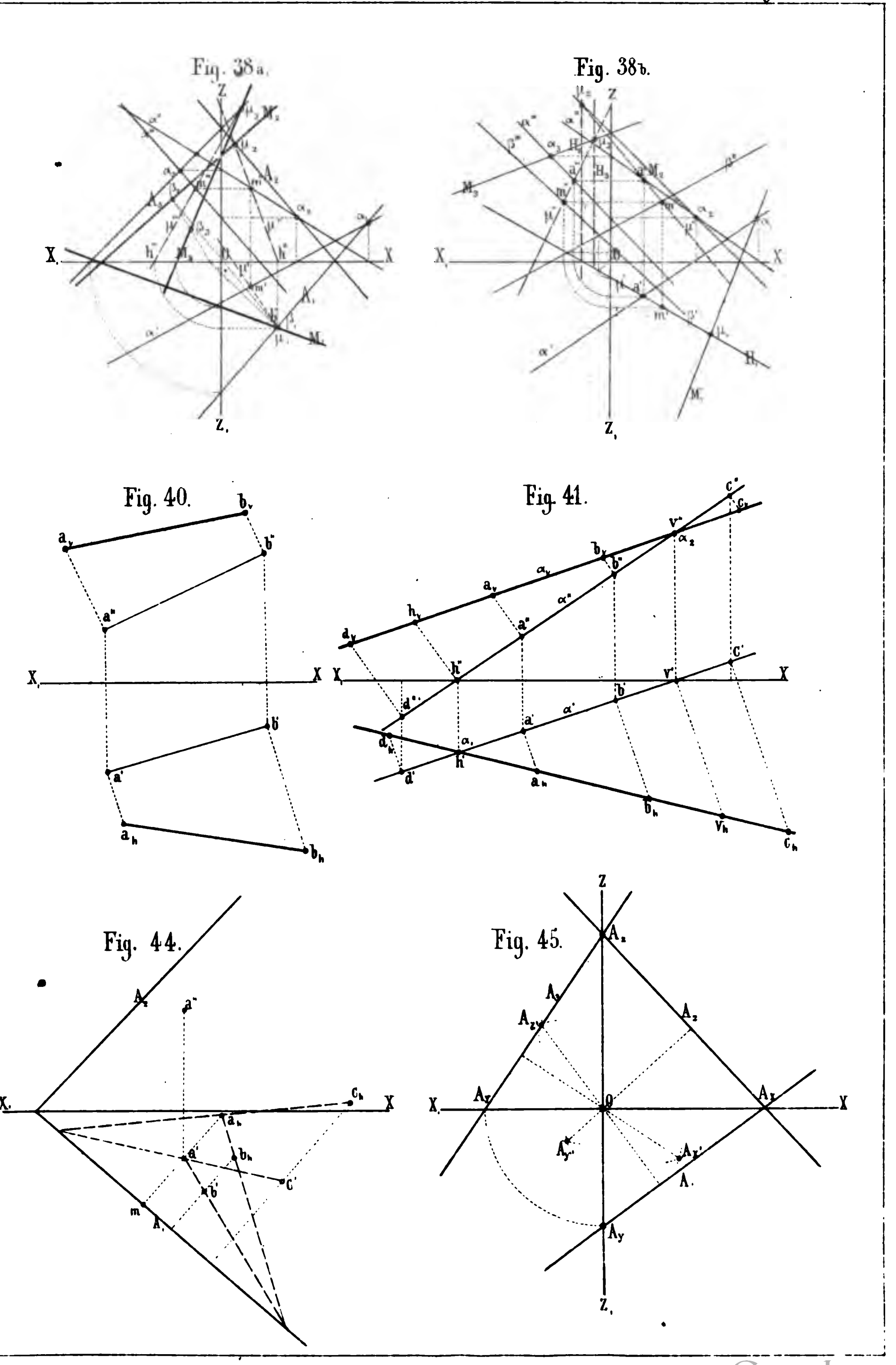


Fig. 32a.
Fig. 32b.
Fig. 34a.
Fig. 34b.
Fig. 36a.
Fig. 36b.


Fig. 38a.
Fig. 38b.
Fig. 40.
Fig. 41.
Fig. 44.
Fig. 45.

'ig. 47.

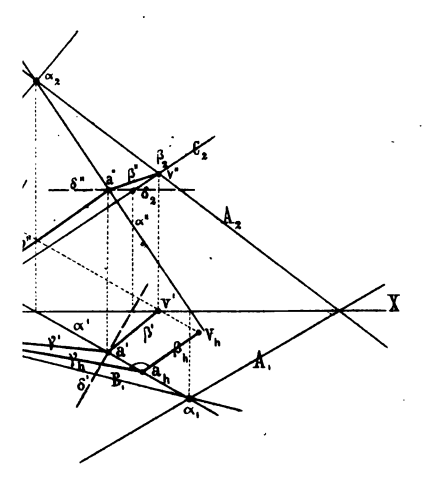


Fig. 48.

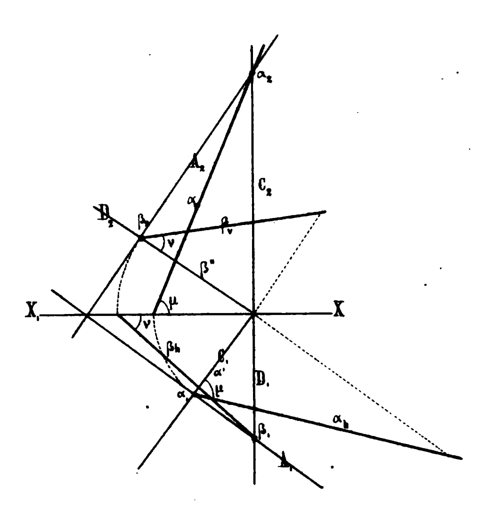


Fig. 51.

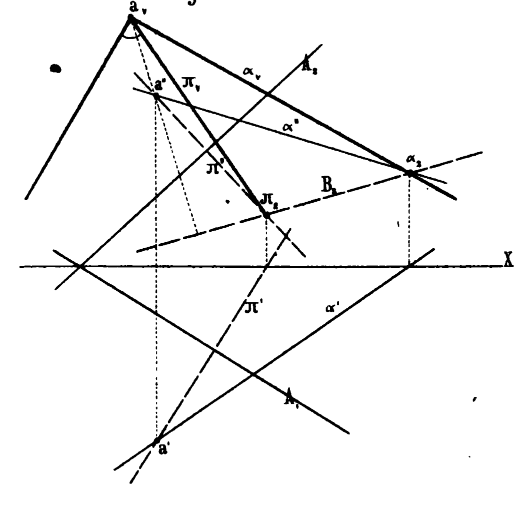
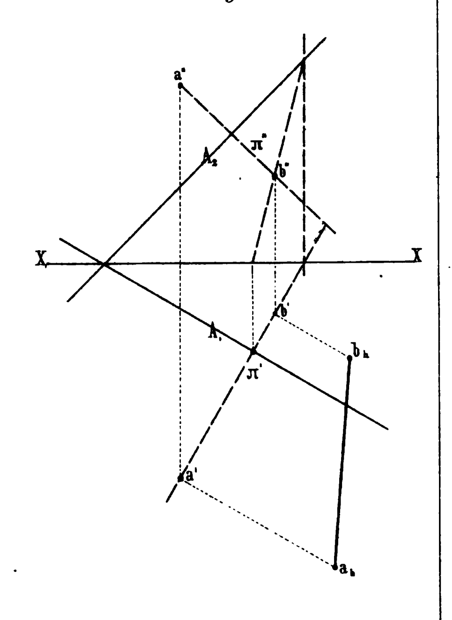
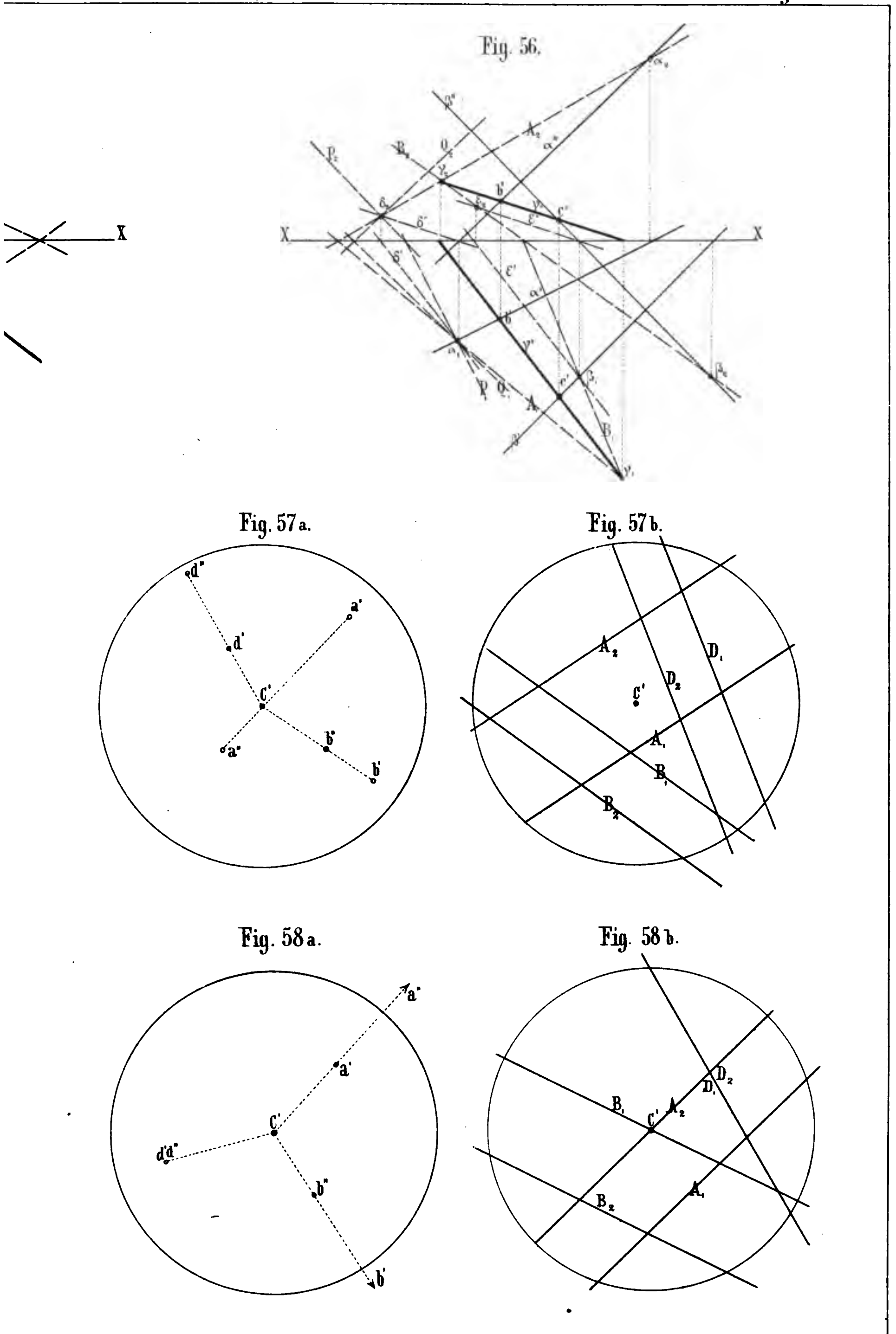
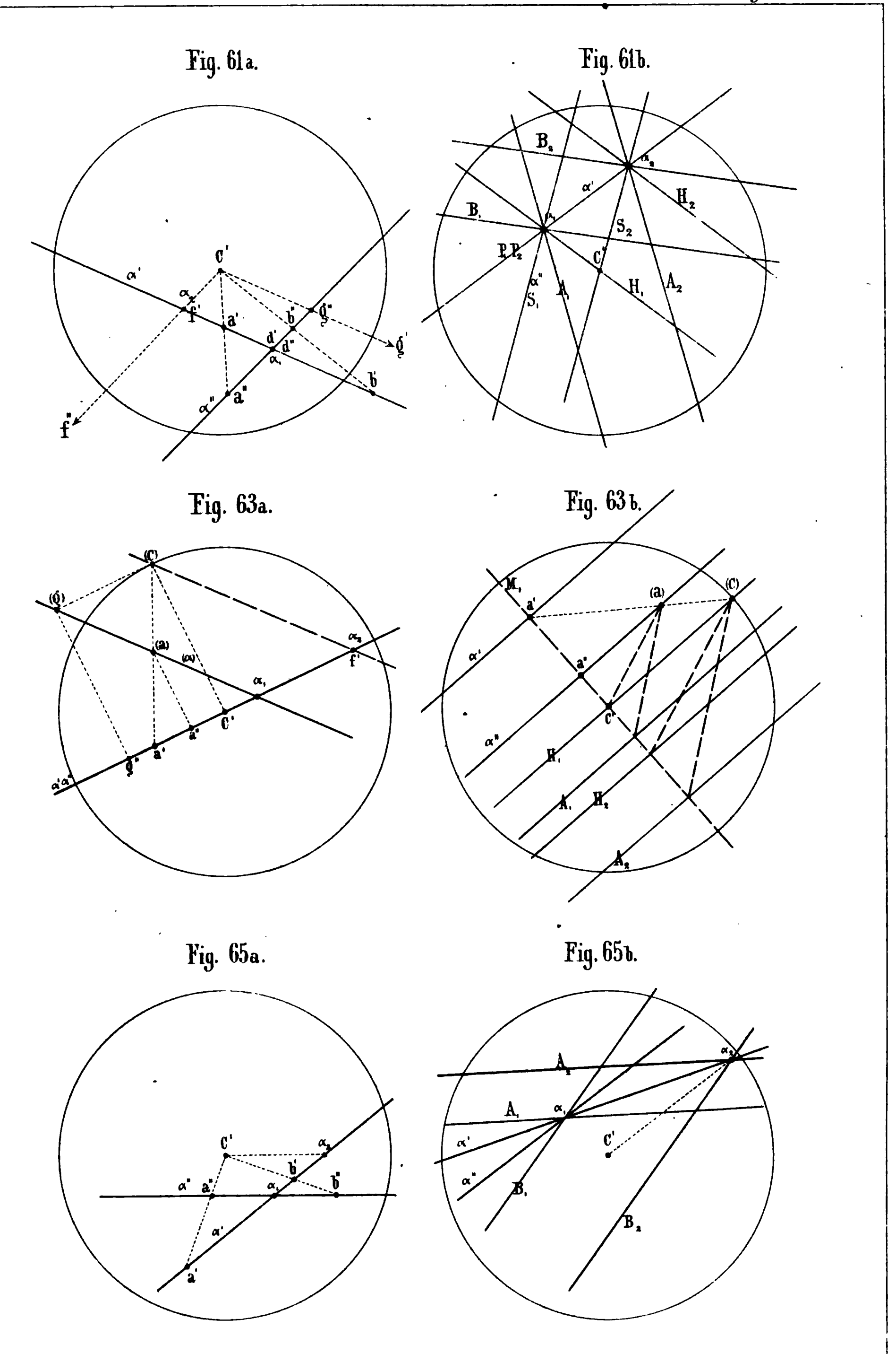
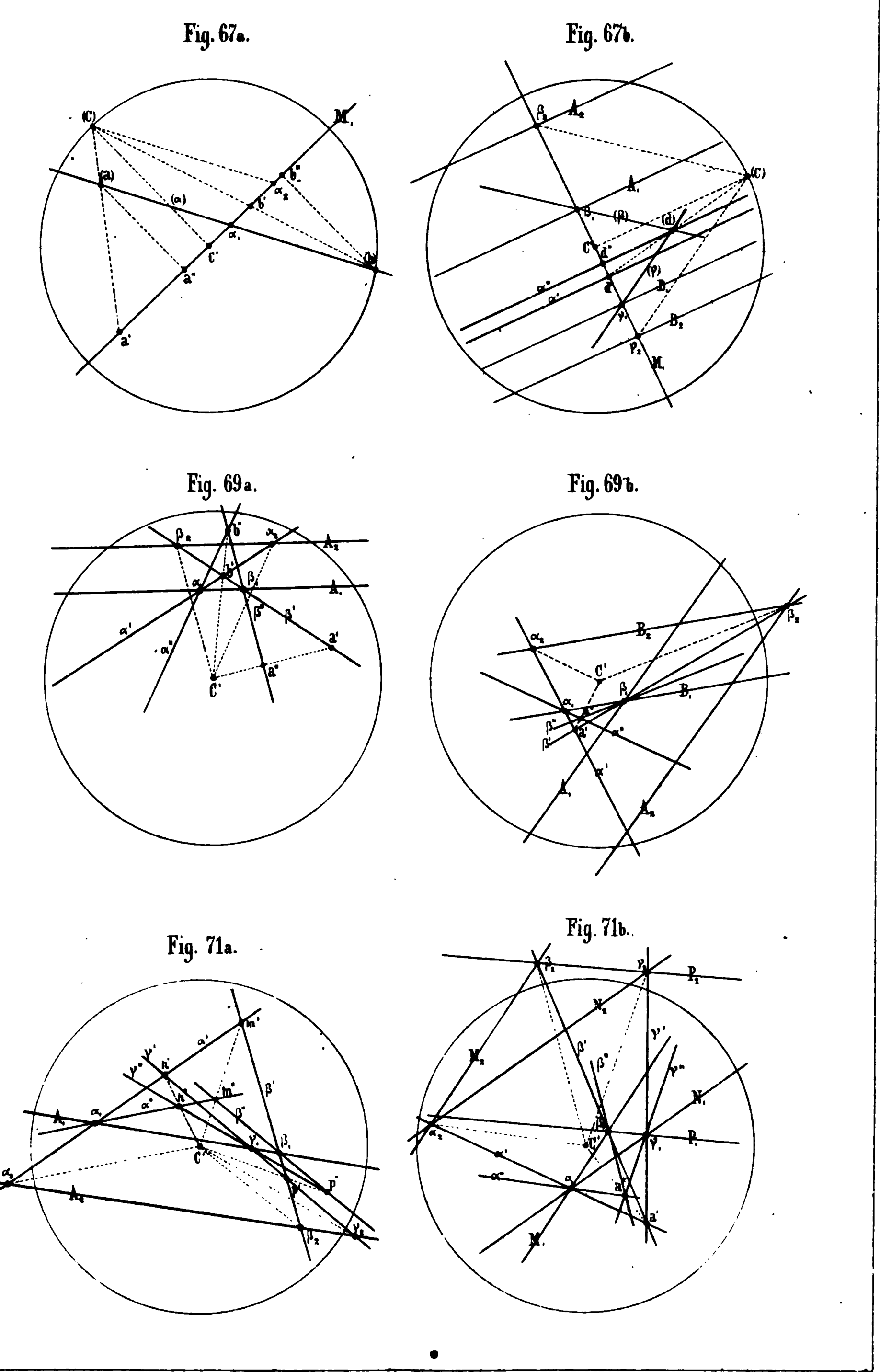


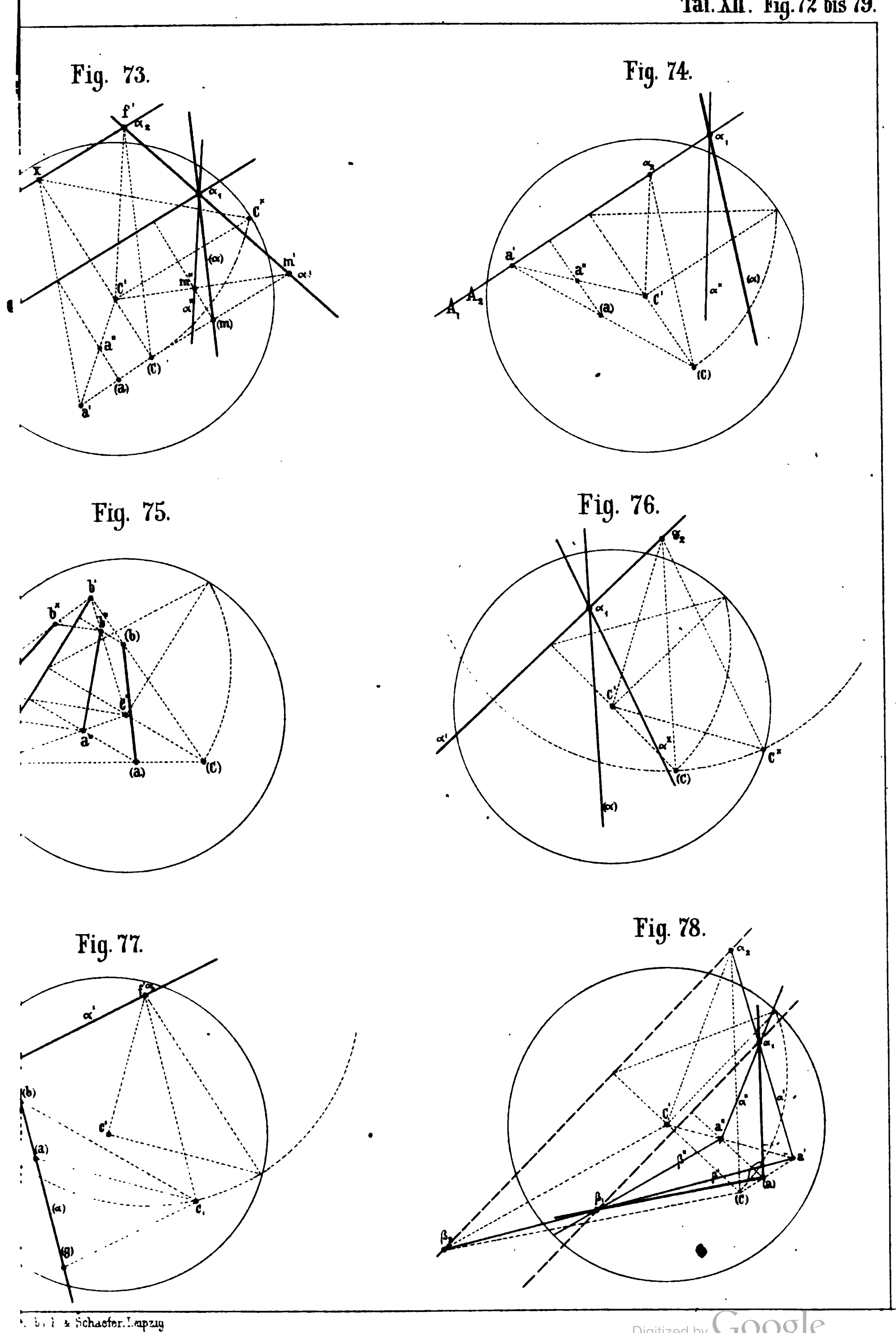
Fig. 52.



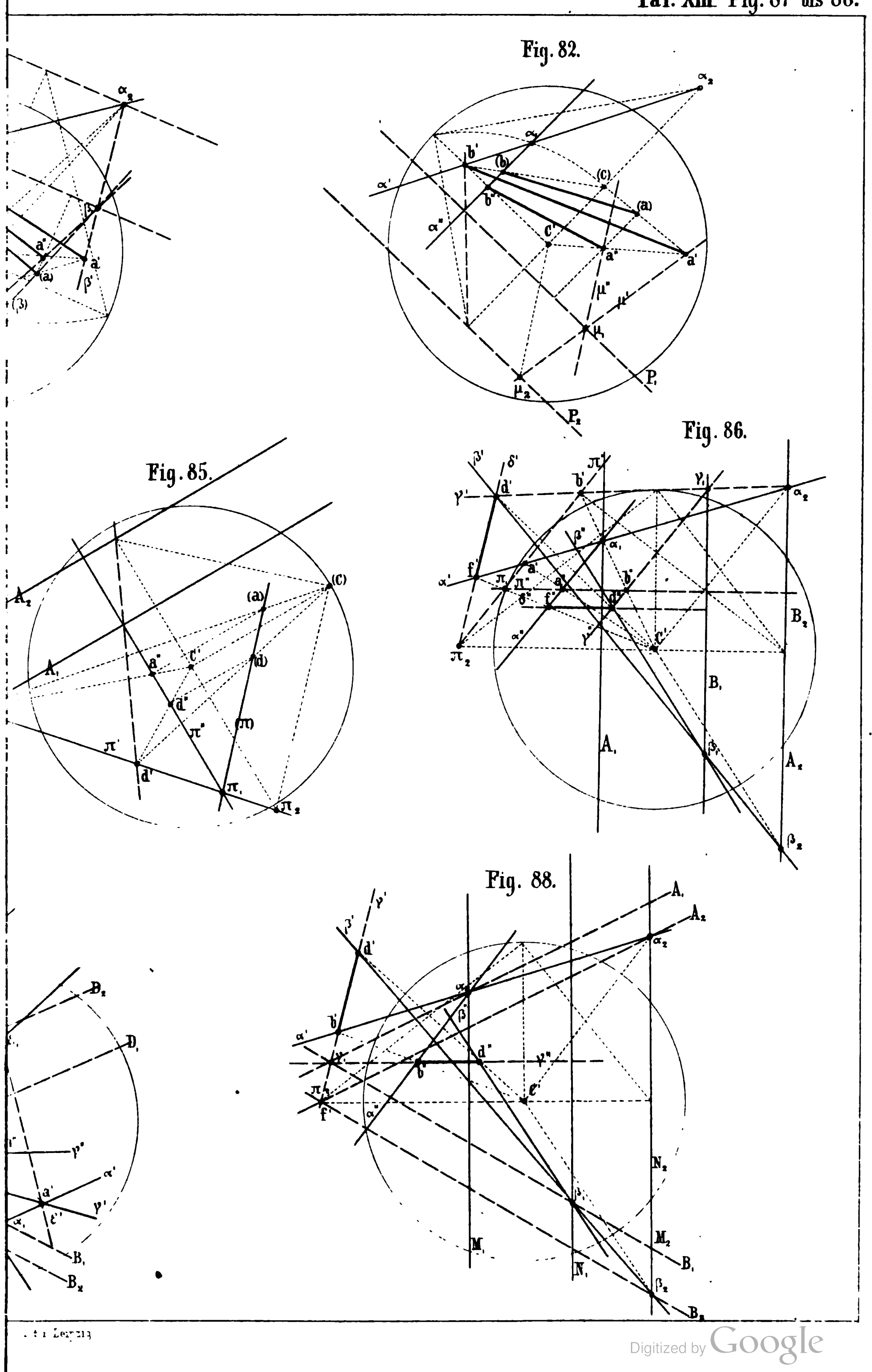

X
Fig. 56.
X
X
Fig. 57 a.
d''
d'
a'
C'
a''
b''
b'
Fig. 57 b.
A₂
D₁
D₂
C'
A₁
B₁
B₂
Fig. 58 a.
a''
a'
C'
d'd''
b''
b'
Fig. 58 b.
D₂
D₁
B₁
C'
A₂
A₁
B₂


Fig. 61 a.
Fig. 61 b.
Fig. 63 a.
Fig. 63 b.
Fig. 65 a.
Fig. 65 b.


Fig. 67a.
Fig. 67b.
Fig. 69a.
Fig. 69b.
Fig. 71a.
Fig. 71b.



Schaefer. Leipzig


Fig. 82.
Fig. 85.
Fig. 86.
Fig. 88.


Math 5708.77
Die elemente der darstellenden geom
Cabot Science
003356310
3 2044 091 922 419